



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse*  
Discipline ou spécialité : *Génie Mécanique*

---

Présentée et soutenue par *Jeerasak PITAKARNNOP*  
Le 4 mai 2009

**Titre :** *Analyse expérimentale et simulation numérique d'écoulements raréfiés de gaz simples et de mélanges gazeux dans les microcanaux*

---

### JURY

*BALDAS Lucien, Maître de Conférences à l'INSA de Toulouse Examineur*  
*COLIN Stéphane, Professeur à l'INSA de Toulouse Examineur*  
*GEOFFROY Sandrine, Maître de Conférences à l'INSA de Toulouse Examineur*  
*LENGRAND Jean-Claude, Directeur de Recherche (retraité) Membre Invité*  
*MORINI Gian Luca, Professeur à l'Université de Bologne, Italie Rapporteur*  
*PERRIER Pierre, Ingénieur de Recherches, Titulaire de l'HDR à IUSTI de Marseille Rapporteur*  
*VALOUGEORGIS Dimitris, Professeur à l'Université de Thessaly, Grèce Examineur*

---

**Ecole doctorale :** *Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie civil et Procédés*

**Unité de recherche :** *Institut Clément Ader*

**Directeur(s) de Thèse :** *Stéphane COLIN et Sandrine GEOFFROY*

**Rapporteurs :** *Gian Luca MORINI et Pierre PERRIER*



---

**Titre : Analyse expérimentale et simulation numérique d'écoulements raréfiés de gaz simples et de mélanges gazeux dans les microcanaux**

**Résumé :** Ce travail porte sur l'étude analytique, numérique et expérimentale d'écoulements gazeux au sein de microcanaux dans des régimes de raréfaction modérée pour lesquels l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local est mise en défaut. Un banc d'essai spécifique a été développé pour la mesure des microdébits gazeux, dans des conditions de température et de pression contrôlées. Les mesures de débit de gaz simples (Ar et He) et de leurs mélanges à travers des microcanaux de section rectangulaire sont confrontées à des modèles continus associés à des conditions aux limites de glissement d'ordre 2 pour le régime d'écoulement glissant et à des modèles cinétiques basés sur l'équation de Boltzmann linéarisée pour le régime de transition, avec un terme de collision modélisé par un modèle BGK pour les gaz purs et un modèle de McCormack pour les mélanges. Les limites de l'approche continue sont mises en évidence pour des nombres de Knudsen moyens supérieurs à 0,1. En revanche, les modèles cinétiques sont en très bon accord avec l'expérience sur les gaz simples pour toute la plage considérée, en supposant une accommodation parfaite à la paroi. Pour les mélanges de gaz dans les régimes les plus raréfiés, des écarts commencent à apparaître, pour lesquels des conclusions définitives nécessiteront des études complémentaires.

**Discipline :** Génie Mécanique

**Mots-Clés :** microfluidique, micro-écoulements gazeux, écoulement glissant, régime de transition, micro-débitmétrie

---

**Title: Experimental analysis and numerical simulation of simple gases mixtures flows in microchannels**

**Abstract:** This thesis focuses on analytical, numerical and experimental investigations on moderate rarefied gas flows through microchannels, for which the local equilibrium assumption is no longer valid. A specific experimental setup has been developed for measuring gas micro-flowrates under controlled temperature and pressure conditions. The experimental flowrate data of monatomic gases (Ar and He) and their mixtures through rectangular microchannels are compared in the slip flow regime with data from continuum models associated with second-order boundary conditions, and in the transition regime with data from the linearized Boltzmann equation. The collision term of the Boltzmann equation is given by the BGK model for monatomic gases and by the McCormack model for gas mixtures. It is clearly pointed out that the validity of the continuum approach is limited to average Knudsen numbers less than 0.1. On the other hand, the kinetic models show an excellent agreement with the experimental data for monatomic gases in the whole considered Knudsen range, assuming diffuse reflection at the wall. However, for the mixtures in higher rarefied regimes, deviations occur; further investigations will be required for more definitive conclusions.

**Major:** Mechanical Engineering

**Keywords:** microfluidics, gas micro-flows, slip flow, transition regime, micro-flowrate measurement

---



แต่ คุณพ่อทศนะและคุณแม่ดารณี พิทักษ์ธรรมพ ที่เคารพรัก

กราบขอบพระคุณคุณพ่อและคุณแม่ที่สนับสนุน ช่วยเหลือและให้กำลังใจลูกคนนี้อย่างตลอดมา

*Cette thèse est dédiée à mes parents (Tassana et Daranee PITAKARNNOP).*

# *Remerciements*

Pendant ces dernières années, le temps est passé si vite que j'ai eu peur de ne pouvoir terminer ce mémoire de thèse à temps. Mais enfin, j'y suis parvenu. Il y a presque huit ans que je suis venu pour la première fois en France afin de poursuivre mes études supérieures en génie mécanique. J'ai commencé mes études en 4<sup>ème</sup> année à l'INSA. Et c'est à travers le Laboratoire de Génie Mécanique de Toulouse, le LGMT (actuellement l'Institut Clément Ader), que j'ai appris beaucoup de choses. J'ai découvert de nouveaux concepts et notions en matière de MEMs. Je me suis surtout intéressé à la problématique des écoulements de gaz raréfié dans les microsystèmes dès mon deuxième stage au LGMT, étant attiré notamment par le fait que la notion de gaz raréfié concerne tout aussi bien les domaines du vide, de l'énergie nucléaire et de l'aérospatial. Grâce aux précieux conseils de mes professeurs, j'ai pu, enfin, mener à bien les recherches qui se trouvent résumées dans ce mémoire de thèse.

Je tiens tout d'abord à remercier profondément les deux directeurs de cette thèse M. Stéphane COLIN et Mlle Sandrine GEOFFROY, ainsi que M. Lucien BALDAS et M. Robert CAEN pour leur chaleureux accueil depuis mon premier jour à l'INSA et également pour leurs précieux conseils et leur patience face à mes limites avec la langue française. Leur aide et leur soutien non seulement dans le domaine scientifique mais également dans la vie quotidienne tout au long des huit années de mes études à l'INSA m'ont permis de mener à bien mes travaux et de tirer pleinement profit de mon séjour en France.

Je tiens aussi à remercier M. Gian Luca MORINI et M. Pierre PERRIER pour m'avoir fait l'honneur d'examiner mes travaux de thèse et d'en être les rapporteurs.

Je remercie également M. Dimitris VALOUGEORGIS d'avoir accepté de présider mon jury. Je remercie enfin M. Jean-Claude LENGRAND d'avoir accepté d'être le membre invité.

Merci mille fois à Nicolas LAURIEN pour son aide à la réalisation du nouveau banc gaz. Merci également à Stéphane ORIEUX et Christine BARROT LATTES pour leurs conseils techniques, obligeamment partagés.

Je voudrais également remercier M. Dimitris VALOUGEORGIS, Stelios, Makis et Sarandis pour m'avoir accueilli pendant mes deux séjours en Grèce et pour les précieuses notions de théorie cinétique de gaz qu'ils m'ont fait partager.

Merci à Mlle Cécile AUBERT, M. Pierre LALONDE, M. Marc ANDUZE et M. Timothéedé EWART pour leurs travaux de thèse qui furent très utiles pour mon mémoire.

Je voudrais également remercier tous mes professeurs du LGMT et de l'INSA pour leur accueil, leur aide et leurs conseils.

Vincenzo, Ahmad, Rachid, Wissam, Batoul, Jonathan, Wafa, Cyril et Toufic, je vous remercie pour avoir partagé avec cœur votre bureau ainsi que pour la belle amitié que vous m'avez témoignée. Merci Andrien, Emmanuel, et tous les amis du labo pour votre amitié.

Merci à Mme Annie CAZEAUX, Mme Nathalie DAYDE et Mme Martine BISAUTA pour leur sympathie et leur aide administrative.

Merci à M. et Mme PUPRASERT, Melle Prodepran WATTANASIRITHAM, M. Pisut PAINMANAKUL, M. Alexandre PERICART, M. Worapol CHINPETCH, M. Veerapong EAKPAN, Mlle Sathira MALASIN et tous mes amis thaïlandais en Europe pour leur aide et leur belle amitié.

Et enfin, Je voudrais remercier mes parents, Tarn Paowitoo WERAWATH et mes proches pour leurs encouragements et leur soutien sans lesquels je n'aurais pas pu être ici en train d'écrire ces remerciements.

Je souhaite que ce mémoire soit utile pour les lecteurs qui s'intéressent à ce domaine.

Jeerasak PITAKARNNOP



# Table des matières

## Nomenclature

Introduction	1
1. Généralités sur les écoulements de gaz raréfiés	5
1.1. Nombres adimensionnels en microfluidique gazeuse	5
1.2. Effets de raréfaction dans les micro-écoulements gazeux isothermes	8
1.3. Interactions entre les molécules de gaz	10
1.4. Interactions gaz/paroi et dégazage	13
1.4.1. Comportement des molécules de gaz au contact d'une surface solide	14
1.4.2. Adsorption et désorption	15
1.4.3. Dégazage	16
2. Régime d'écoulement glissant	19
2.1. Introduction : Analyse bibliographie	19
2.1.1. Equations générales : du moléculaire au continu	20
2.1.2. Les équations de base	23
2.1.3. Conditions aux limites et coefficients de glissement	24
2.2. Calculs analytique et semi-analytique de vitesses et débits	32
2.2.1. Ecoulement entre deux plans parallèles	32
2.2.2. Ecoulement dans les canaux de section rectangulaire	36
2.2.3. Ecoulement dans les canaux de section triangulaire équilatérale	39
2.3. Simulations numériques à l'aide de Fluent	43

2.3.1. La méthode « Low Pressure Boundary Slip (LPBS) »	44
2.3.2. La méthode « Moving Wall (MW) »	44
2.3.3. Comparaison des méthodes LPBS et MW	45
Conclusion	67
3. Régime de transition	75
3.1. Introduction	75
3.1.1. Ecoulements de gaz dans le régime de transition	75
3.1.2. Modèles d'équations cinétiques	76
3.1.3. Les différentes approches pour le traitement de l'équation de Boltzmann	78
3.2. Approche cinétique	78
3.2.1. Equation de Boltzmann	78
3.2.2. Les modèles de Boltzmann linéarisés	79
3.2.3. Conditions aux limites	83
3.3. Procédure de calcul numérique	84
3.3.1. Généralités	84
3.3.2. Gaz monoatomique	85
3.3.3. Mélange gazeux	88
4. Banc d'essais pour la mesure de microdébits gazeux	93
4.1. Mesures de microdébits et banc d'essais	93
4.1.1. Méthodes de mesure de microdébits gazeux	93
4.1.2. Description du banc d'essais et méthodologie de mesure	95
4.2. Incertitude et problèmes de mesures	97
4.2.1. Etanchéité du système : contrôles de fuite, de dégazage	97
4.2.2. Contrôle de la température	98
4.2.3. Mesure de débit par la méthode DG	98
4.2.4. Mesure de débit par la méthode VC	103
4.3. Acquisition et traitement des données	108
4.3.1. Méthode DG	108

4.3.2. Méthode VC	109
Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux de section rectangulaire	113
5.1. Microcanaux testés	113
5.2. Modèles théoriques utilisés	115
5.2.1. Pour les gaz simples – modèles continus	116
5.2.2. Pour les gaz simples – modèles cinétiques	118
5.2.3. Pour les mélanges binaires – modèles continus	120
5.2.4. Pour les mélanges binaires – modèles cinétiques	120
5.3. Écoulements de gaz monoatomiques	121
5.3.1. Mesures expérimentales	121
5.3.2. Comparaison des données expérimentales avec les modèles moyennés	122
5.3.3. Comparaison des données expérimentales avec les modèles continus et cinétique intégré	131
5.4. Écoulement de mélange gazeux binaire	140
5.4.1. Mesures expérimentales	140
5.4.2. Comparaison des données expérimentales avec les modèles moyennés	144
5.4.3. Comparaison des données expérimentales avec les modèles continus et cinétique intégré	160
Conclusions	169
Conclusion	171



## Nomenclature

### Symboles romains

$a$	Coefficient de régression linéaire pour l'évolution de pression [ Pa s <sup>-1</sup> ]
$a$	Vitesse du son [ m s <sup>-1</sup> ]
$a$	Rapport de forme d'une section rectangulaire
$b$	Constante de régression pour l'évolution de pression [ Pa ]
$c$	Incertitude due aux effets non isothermes
$f$	Coefficient de frottement
$f$	Fonction de distribution [ m <sup>-6</sup> s <sup>3</sup> ]
$\mathbf{f}$	Vecteur force volumique [ N m <sup>-3</sup> ]
$f_{loc}^M$	Fonction de distribution locale de Maxwell [ m <sup>-6</sup> s <sup>3</sup> ]
$f_0^M$	Fonction de distribution absolue de Maxwell [ m <sup>-6</sup> s <sup>3</sup> ]
$h$	Demi profondeur du microcanal [ m ]
$h_\alpha$	Fonction de perturbation de l'espèce $\alpha$
$k$	Conductivité thermique [ W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$k_B$	Constante de Boltzmann : $1,3806503 \times 10^{-23}$ [ J K <sup>-1</sup> ]
$l_{ref}$	Longueur calibrée de la pipette [ m ]
$l_{ij}$	Distance entre les faisceaux de deux capteurs optiques [ m ]
$m$	Masse d'une molécule de gaz [ kg ]
$\dot{m}$	Débit massique [ kg s <sup>-1</sup> ]
$n$	Densité moléculaire [ m <sup>-3</sup> ]
$\mathbf{q}(q_x, q_y, q_z)$	Vecteur flux thermique [ W m <sup>-2</sup> ]
$q'_\alpha, q'_\beta$	Flux thermique adimensionnel pour le terme de collision de McCormack linéarisé

## Nomenclature

---

$r$	Distance intermoléculaire [ m ]
$\mathbf{r}(x, y, z)$	Vecteur position [m, m, m]
$\mathbf{r}(r, \theta, z)$	[m, rad, m]
$t$	Temps [ s ]
$\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$	Vecteur vitesse macroscopique [ m s <sup>-1</sup> ]
$u'_\alpha, u'_\beta$	Vitesse adimensionnelle pour le terme de collision de McCormack linéarisé
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes
$x', y', z'$	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles
$x^*, y^*, z^*$	
$A^*$	Coefficient pour le calcul analytique de l'écoulement dans le microcanal de section triangulaire équilatérale
$B^*$	Coefficient pour le calcul analytique de l'écoulement dans le microcanal de section triangulaire équilatérale
$B$	Largeur du microcanal [ m ]
$C$	Concentration molaire du mélange
$C_1$	Coefficient de glissement d'ordre 1
$C_2$	Coefficient de glissement d'ordre 2
$D_H$	Diamètre hydraulique [ m ]
$E$	Energie totale par unité de volume [ J m <sup>-3</sup> ]
$\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$	Vecteur force massique [ m s <sup>-2</sup> ]
$G, G'$	Débit massique adimensionné suivant la théorie cinétique
$H$	Profondeur du microcanal [ m ]
$\mathbf{J}(J_x, J_y, J_z)$	Vecteur flux de masse [ kg s <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup> ]
$Kn, Kn'$	Nombre de Knudsen
$L$	Longueur du microcanal [ m ]
$L$	Largeur de référence du microcanal de section triangulaire équilatérale [ m ]

## Nomenclature

---

$L_c$	Longueur caractéristique [ m ]
$M$	Masse molaire [ kg mol <sup>-1</sup> ]
$Ma$	Nombre de mach
$P$	Pression [ Pa ]
$Q$	Débit volumique [ m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> ]
$Q(ff_*)$	Opérateur de collision [ m <sup>-6</sup> s <sup>2</sup> ]
$\mathcal{R}$	Constante universelle des gaz parfaits [ J mol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$R$	Constante spécifique du gaz [ J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]
$Re$	Nombre de Reynolds
$T$	Température [ K ]
$V$	Volume [ m <sup>3</sup> ]
$V_{ref}$	Volume calibré de la pipette [ m <sup>3</sup> ]
$Y$	Fonction de distribution adimensionnelle

## Symboles grecs

$\alpha$	Coefficient d'accommodation
$\alpha_x, \alpha_y$	Coefficient d'accommodation normale et tangentielle
$\beta$	Coefficient pour le calcul du coefficient de glissement d'ordre 1
$\beta$	Angle de base des sections triangulaire et trapézoïdale [rad]
$\gamma$	Rapport des capacités thermiques du gaz
$\gamma$	Indice d'attraction
$\delta$	Indice de répulsion
$\delta, \delta'$	Paramètre de raréfaction
$\delta_{bl}$	Epaisseur de couche limite [m]
$\varepsilon$	Petit paramètre de perturbation
$\kappa$	Constante de répulsion
$\kappa'$	Constante de attraction
$\lambda$	Libre parcours moyen [m]

## Nomenclature

---

$\mu$	Viscosité dynamique [ N s m <sup>-2</sup> ]
$\nu$	Viscosité cinématique : $\nu = \mu/\rho$ [ m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]
$\nu$	Fréquence de collision [ s <sup>-1</sup> ]
$\xi(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$	Vecteur vitesse moléculaire [ m s <sup>-1</sup> ]
$\tilde{\xi}$	Vitesse moyenne des molécules : $\tilde{\xi} = \sqrt{2RT}$ [ m s <sup>-1</sup> ]
$\wp$	Perturbation de la densité
$\rho$	Masse volumique [ kg m <sup>-3</sup> ]
$\sigma$	Tenseur des contraintes [ Pa ]
$\sigma_d$	Diamètre moyen de la molécule supposée sphérique [ m ]
$\tau$	Perturbation de la température
$\varphi_i$	Racine pour le calcul semi-analytique du débit dans les canaux de section rectangulaire
$\phi$	Potentiel intermoléculaire
$\chi$	Coefficient pour le calcul analytique du débit dans le microcanal de section triangulaire équilatérale
$\psi_i$	Racine pour le calcul semi-analytique du débit dans les canaux de section rectangulaire
$\Phi$	Fonction de perturbation
$\Pi$	Rapport de pression
$\Pi'_{ij,\alpha}, \Pi'_{ij,\beta}$	Tenseur des contraintes adimensionnel pour le terme de collision de McCormack linéarisé
$\Omega_{\alpha\beta}^{(kl)}$	Intégrales de Chapman-Cowling

## Acronymes

BGK	Bhatnagar-Gross-Krook
CGA, CGB	Capteurs à diaphragme capacitif
CL	Conditions aux limites
DG	Mesure basée sur le suivi de déplacement d'une goutte liquide



## Nomenclature

---

LPBS	Low Pressure Boundary Slip
MW	Moving Wall
NS	Navier-Stokes
OSA, OSB	Capteurs optoélectroniques
PSA, PSB	Capteurs piézorésistifs
TMAC	Coefficient d'accommodation de la composante tangentielle
VC	Méthode à volume constant



# Introduction

L'étude des micro-écoulements gazeux est un domaine de recherche qui s'est récemment beaucoup développé, notamment grâce à des avancées majeures dans le domaine du micro-usinage. Les comportements sont différents de ceux mis en jeu à macro-échelle [1] car le libre parcours moyen des molécules devient non négligeable devant les dimensions internes des microsystèmes (couramment appelés MEMS : Micro Electro Mechanical Systems). Ces écoulements dits raréfiés ne permettent plus d'utiliser les approches continues, ou nécessitent pour le moins de modifier les conditions aux limites classiques. Les interactions des molécules de gaz entre elles d'une part et entre elles et la paroi d'autre part régissent les mécanismes d'écoulements. De par leur nature raréfiée, ces micro-écoulements ont bénéficié des progrès réalisés en recherche dans les domaines du vide et de l'aérospatial, qui développent donc des approches similaires. En combinant résultats théoriques ou numériques et données expérimentales, les coefficients de transport peuvent alors être déterminés et permettent de modéliser les systèmes aérodynamiques aérospatiaux et satellitaires [2][3], les systèmes pour la génération de vide [4] et les MEMS [5][6][7]. Le but de notre travail est d'apporter une contribution à la compréhension des mécanismes d'écoulement isotherme de gaz raréfié au sein des microsystèmes et de proposer une méthode de détermination des coefficients de transport et notamment du coefficient d'accommodation à la quantité de mouvement tangentielle.

En diminuant les dimensions des microsystèmes, les effets liés à la surface deviennent prédominants. L'effet le plus important est le glissement des particules à la paroi ; on parle alors de vitesse de glissement (par exemple glissement sur des parois solides [8] ou sur des interfaces liquides présentes dans les aérosols [9]). Cet effet commence à devenir sensible dans un régime d'écoulement faiblement raréfié

appelé régime d'écoulement glissant. Dans ce régime, les équations de Navier-Stokes obtenues pour des écoulements continus classiques restent valides à condition de prendre en compte des conditions aux limites modélisant la vitesse de glissement. Par contre, cette méthode devient inadaptée dans les régimes plus raréfiés. Les chercheurs ont alors développé des outils mathématiques basés sur des équations de conservation d'ordre supérieur à celles de Navier-Stokes, comme les équations de Burnett, qui permettent d'étudier les écoulements raréfiés en déséquilibre thermodynamique. Dans le régime encore plus raréfié dit régime de transition, aucune méthode continue n'est acceptable et une approche moléculaire devient nécessaire. On peut ainsi utiliser l'équation de Boltzmann qui prend en compte les collisions intermoléculaires. Même pour les ordinateurs actuels, cette méthode requiert beaucoup, voire trop, de ressources et il est souvent préférable de considérer les molécules statistiquement à une échelle mésoscopique. Enfin, pour le régime moléculaire libre, le régime le plus raréfié, la densité moléculaire est alors suffisamment faible pour pouvoir négliger les collisions intermoléculaires et ne prendre en compte que les collisions avec les parois.

La recherche fondamentale sur la théorie cinétique des gaz a commencé à la fin du 19<sup>ème</sup>, début du 20<sup>ème</sup> siècle, avec les travaux de Rudolf Clausius, James Clerk Maxwell et Ludwig Boltzmann [10]. Mais c'est au cours des quarante dernières années qu'est apparu un besoin de développer ces connaissances dans le cadre des MEMS.

Le premier chapitre de ce manuscrit est consacré à la présentation de la problématique relative aux micro-écoulements gazeux, en commençant par la classification des régimes d'écoulement. Les principaux modèles de collision intermoléculaire sont présentés. On évoque également les problèmes liés au dégazage qui peuvent être rencontrés à basse pression.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation des micro-écoulements gazeux isothermes. L'approche hydrodynamique est présentée ; elle permet de mettre en œuvre des outils de calcul numérique tels que Fluent, qu'on illustre dans le cas d'un écoulement de type Poiseuille en régime glissant. On discute notamment de la difficulté

d'implémenter correctement des conditions aux limites de glissement dans les angles des conduites de sections triangulaires ou trapézoïdales, fréquemment rencontrées dans les microsystèmes à fluides. Les détails plus techniques sont développés dans les annexes A1 et A2.

Le troisième chapitre détaille l'approche cinétique utilisée dans cette thèse, principalement dans le régime de transition. L'équation de Boltzmann est linéarisée et le terme de collision est traité par un modèle BGK ou de Mac Cormack, selon que l'on considère un gaz simple ou un mélange de gaz. La mise en œuvre de ces modèles avec une méthode de discrétisation des vitesses (DVM – Discrete Velocity Method) a été réalisée dans l'équipe de Dimitris Valougeorgis à Volos, équipe dans laquelle nous avons effectué deux séjours de travail. Certains détails sont reportés dans l'annexe A2, pour simplifier la lecture du chapitre.

Le quatrième chapitre présente une contribution majeure de ce travail, relative au développement d'un banc expérimental permettant de mesurer le débit massique de gaz au sein de microdispositifs.

Dans le cinquième chapitre, ce banc d'essais est exploité pour mesurer des débits d'argon, d'hélium et de différents mélanges de ces deux gaz monoatomiques, du régime hydrodynamique jusqu'au régime de transition, à travers des microcanaux de section rectangulaire. Les débits expérimentaux sont comparés aux valeurs théoriques tirées des modèles présentés dans les chapitres 2 et 3. L'analyse permet de déterminer le coefficient d'accommodation des gaz et de discuter de la pertinence des différents modèles.

Enfin, le manuscrit se termine sur une conclusion générale et des perspectives, dans lesquelles nous dégageons quelques voies possibles pour de futurs travaux expérimentaux à mener avec notre banc d'essais.

Bien que la majeure partie de nos travaux soit axée sur l'étude fondamentale d'écoulements de référence dans des microcanaux cylindriques longs de sections variées,

nous nous sommes également intéressés à des problèmes plus appliqués, impliquant des géométries plus complexes. L'annexe A3 en est un exemple : elle présente une analyse expérimentale et numérique de micro-éjecteurs destinés à la génération de vide par effet Venturi.

### Références Bibliographiques

- [1] Kundt, A., and Warburg, E. (1875). "Über Reibung und Wärmeleitung verdünnter Gases." *Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie*, 155, 337.
- [2] Moe, K., and Moe, M. (2005). "Gas-surface interactions and satellite drag coefficients." *Planetary and Space Science*, 53, 793-801.
- [3] Sharipov, F. (2003). "Hypersonic flow of rarefied gas near the Brazilian satellite during its reentry into atmosphere." *Brazilian Journal of Physics*, 33(2), 398-405.
- [4] Tekasakul, P., Bentz, J. A., Tompson, R. V., and Loyalka, S. K. (1996). "The spinning rotor gauge : measurements of viscosity, velocity slip coefficients, and tangential momentum accommodation coefficients." *Journal of Vacuum Science and Technology. A. Vacuum, Surfaces, and Films*, 14(5), 2946-2952.
- [5] Arkilic, E. B., Breuer, K. S., and Schmidt, M. A. (2001). "Mass flow and tangential momentum accommodation in silicon micromachined channels." *Journal of Fluid Mechanics*, 437, 29-43.
- [6] Colin, S., Lalonde, P., and Caen, R. (2004). "Validation of a second-order slip flow model in rectangular microchannels." *Heat Transfer Engineering* 25(3), 22-30.
- [7] Ewart, T., Perrier, P., Grauer, I., and Méolans, J. G. (2007). "Tangential momentum accommodation in microtube." *Microfluidics and Nanofluidics*, 3(6), 689-695.
- [8] Colin, S. (2005). "Rarefaction and compressibility effects on steady and transient gas flows in microchannels." *Microfluidics and Nanofluidics*, 1(3), 268-279.
- [9] Loyalka, S. K., and Griffin, J. L. (1994). "Rotation of non-spherical axi-symmetric particles in the slip regime." *Journal of Aerosol Science*, 25(3), 509-525.
- [10] Boltzmann, L. (1995). *Lectures on gas theory*. Dover Publications.

## Chapitre 1

# Généralités sur les écoulements de gaz raréfiés

Ce chapitre est un chapitre d'introduction à la problématique des écoulements de gaz raréfiés. On commence par un rappel sur les nombres adimensionnels utiles pour ce type d'écoulements et plus particulièrement sur le nombre de Knudsen et les régimes d'écoulements associés. La deuxième partie concerne les effets de la raréfaction sur les écoulements internes au sein de microsystèmes. Ce chapitre se termine par la discussion des phénomènes importants liés aux interactions de molécules gaz-gaz et gaz-paroi.

### 1.1. Nombres adimensionnels en microfluidique gazeuse

Les nombres de Mach et de Reynolds sont les deux nombres adimensionnels les plus employés pour classifier les écoulements gazeux. Le niveau de raréfaction est quant à lui caractérisé par le rapport du libre parcours moyen à une longueur caractéristique de l'écoulement. Introduit en 1909 par Knudsen, ce rapport est actuellement connu sous le nom de nombre de Knudsen [1] :

$$Kn = \frac{\lambda}{L_c} \quad (1.1)$$

où  $\lambda$  est le libre parcours moyen (la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions intermoléculaires dans un référentiel local lié au mouvement macroscopique) et  $L_c$  est une longueur caractéristique du dispositif. Les différents régimes d'écoulements classifiés par ce nombre adimensionnel sont donnés sur la figure 1.1. Les modèles basés sur l'approche continue (qui utilisent généralement les

équations de conservation de Navier-Stokes et l'équation de Fourier) sont efficaces jusqu'à des nombres de Knudsen de l'ordre de 0,1 et l'approche cinétique (qui utilise par exemple l'équation de Boltzmann) est nécessaire pour des valeurs supérieures. Par contre, les valeurs limites des différents domaines doivent être interprétées comme des ordres de grandeur car la transition d'un régime à un autre (*e.g.* régime de glissement à régime de transition) n'est pas brutale mais progressive [2]. Ainsi le traitement théorique à la limite des régimes de glissement et de transition peut se faire par une approche continue ou par une approche cinétique.

	$Kn = 10$	$Kn = 0.1$	$Kn = 0.01$	$Kn \rightarrow 0$
<b>Régime moléculaire libre</b> <i>Free molecular regime</i>	<b>Régime de transition</b> <i>Transition regime</i>	<b>Régime de glissement</b> <i>Slip-flow regime</i>	<b>Régime continu</b> <i>Continuum regime</i>	
			<b>Visqueux</b> <i>Viscous</i>	<b>Non-visqueux</b> <i>Inviscid</i>
Equation de Boltzmann sans collisions	Equation de Boltzmann	Navier-Stokes + <i>CL de glissement</i>	Navier-Stokes	Euler

**Figure 1.1 :** Classification des régimes d'écoulements en fonction du nombre de Knudsen et exemples de modèles appropriés pour chaque régime

Les spécialistes de la théorie cinétique utilisent plus fréquemment le paramètre de raréfaction  $\delta$ , autre nombre adimensionnel, pour quantifier l'état de raréfaction du gaz [3]. Il est lié au nombre de Knudsen par

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{Kn} . \quad (1.2)$$

Le nombre de Knudsen est par ailleurs relié aux nombres de Mach  $Ma$  et de Reynolds  $Re$ . En effet, il est possible de montrer que la vitesse de son  $a$  et la viscosité cinématique  $\nu$  peuvent s'écrire en fonction de la vitesse moyenne des molécules  $\bar{\xi}$  sous la forme

$$a = \bar{\xi} \sqrt{\frac{\pi \gamma}{8}} , \quad \nu = \frac{1}{2} \lambda \bar{\xi} \quad (1.3)$$

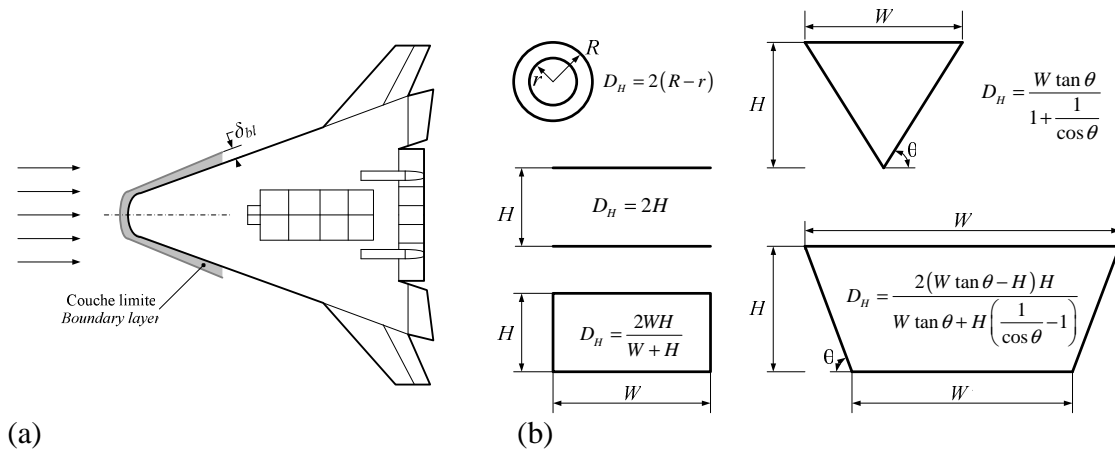


où  $\gamma$  est le rapport des capacités thermiques massiques du gaz. En combinant les équations (1.1) et (1.3), nous obtenons le nombre de Knudsen en fonction de  $Ma$ ,  $Re$  et  $\gamma$  [4] :

$$Kn = \sqrt{\frac{\pi \gamma}{2}} \frac{Ma}{Re}. \quad (1.4)$$

Notons que l'équation (1.4) n'a de sens que pour les écoulements internes, pour lesquels la longueur caractéristique (par exemple le diamètre hydraulique d'un microcanal) est la même pour les nombres de Knudsen et de Reynolds. En revanche, pour les écoulements externes à basse pression tels que ceux rencontrés dans le cas de vols à haute altitude, la longueur caractéristique  $L_{c1}$  à considérer pour le calcul du nombre de Knudsen est l'épaisseur de la couche limite  $\delta_{bl}$  (voir figure 1.2a). Par contre, la longueur caractéristique  $L_{c2}$  associée au nombre de Reynolds est classiquement la distance du point considéré au bord d'attaque de l'écoulement externe. Dans le cas d'une couche limite laminaire,  $\delta_{bl} \sim L_{c2}/\sqrt{Re}$ . Il en résulte [5] :

$$Kn \sim \frac{Ma}{\sqrt{Re}}. \quad (1.5)$$



**Figure 1.2 :** Longueurs caractéristiques à prendre en compte pour le calcul du nombre de Knudsen

(a) épaisseur de couche limite pour un écoulement externe à basse pression

(b) diamètre hydraulique pour un écoulement confiné dans un microcanal

Dans les micro-écoulements internes considérés dans cette thèse, la longueur caractéristique est le diamètre hydraulique  $D_H$  des microcanaux (voir figure 1.2b). La relation entre les trois nombres adimensionnels sera donc donnée par l'équation (1.4). Elle montre l'interdépendance entre effets de compressibilité (caractérisés par le nombre de Mach), de viscosité (caractérisés par le nombre de Reynolds) et de raréfaction (caractérisés par le nombre de Knudsen).

### 1.2. Effets de raréfaction dans les micro-écoulements gazeux isothermes

On peut se trouver confronté à des écoulements raréfiés dans différents domaines techniques, à commencer par celui de la génération de vide. Mais c'est la recherche spatiale qui a accéléré le développement des connaissances au cours du 20ème siècle. La raréfaction des écoulements externes alors étudiés était due aux faibles niveaux de pression rencontrés. En revanche, au début des années 80, le développement rapide des techniques de micro-usinage a débouché sur la réalisation de microsystèmes fluidiques, avec des dimensions internes micrométriques ou sub-micrométriques. Dans ces systèmes, même dans des conditions de pression classiques, la raréfaction des écoulements gazeux augmente, non plus du fait de l'augmentation du libre parcours moyen des molécules, mais suite à la forte diminution des longueurs caractéristiques des canalisations.

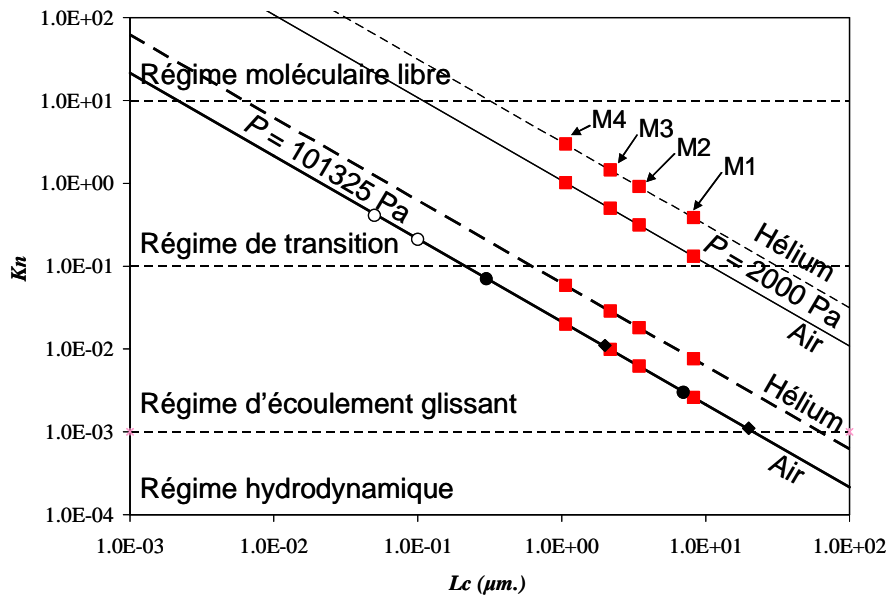
L'évaluation du libre parcours moyen  $\lambda$  dépend du modèle de collision des molécules de gaz et du type de force intermoléculaire considéré. L'expression la plus fréquemment utilisée est proposée par Maxwell. Le libre parcours moyen, qui est cohérent avec le nombre de Knudsen de l'équation (1.4), s'exprime alors en fonction de la viscosité dynamique  $\mu$  :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu}{P} \sqrt{RT}, \quad (1.6)$$

où  $P$ ,  $R$  et  $T$  sont respectivement la pression, la constante spécifique du gaz et la température. D'autres expressions sont couramment utilisées ; elles dépendent du modèle de collision considéré (voir paragraphe 1.3). Par exemple, un code de calcul tel que Fluent utilise l'expression suivante :

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi \sigma_d^2 P}, \quad (1.7)$$

basée sur un modèle d'interaction moléculaire de type Lennard-Jones. Dans cette équation,  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $\sigma_d$  est la longueur caractéristique de Lennard-Jones. Elle représente le diamètre moyen de la molécule (voir paragraphe 1.3 et équation (1.12)). Elle peut être obtenue à partir d'une mesure de la viscosité. D'autres modèles d'interactions intermoléculaires sont proposés dans la littérature (voir paragraphe 1.3). Pour les écoulements internes, la modélisation de l'interaction des molécules de gaz avec la paroi est également un point important (voir paragraphe 1.4).



**Figure 1.3 :** Régimes d'écoulement gazeux dans des microdispositifs

à la pression atmosphérique et à une pression de 2000 Pa :

écoulement entre tête de lecture/écriture et disque dur d'un ordinateur ( $\circ$ ), micro-tuyères ( $\bullet$ ),

micro-capteurs ( $\blacklozenge$ ) et microcanaux étudiés dans cette thèse ( $\blacksquare$ ) (voir 5.1)

Dans les microsystèmes fluidiques, on peut avoir un effet combiné de basse pression et de confinement, qui tous deux tendent à augmenter la raréfaction. La figure 1.3 montre les régimes d'écoulement de gaz dans des microsystèmes typiques ainsi que la variation de la raréfaction avec un changement de pression. La plupart des micro-

dispositifs qui opèrent à la pression atmosphérique impliquent des écoulements de type glissant. Pour des microsystèmes opérant à basse pression, l'écoulement peut être dans le régime de transition ou même dans le régime moléculaire libre. Nous nous sommes intéressés à deux régimes d'écoulements : l'écoulement glissant et de transition qui sont typiques des régimes rencontrés dans la plupart des microsystèmes.

### 1.3. Interactions entre les molécules de gaz

On a vu dans le paragraphe précédant que les modèles d'interactions moléculaires sont importants pour déterminer le niveau de raréfaction. Ils sont également à préciser dans les modèles de la théorie cinétique des gaz pour définir le terme de l'opérateur de collision de l'équation de Boltzmann. Le modèle de collision joue également un rôle dans l'écriture des conditions aux limites de glissement [6]. La force d'interaction entre deux molécules sphériques et non polaires est fonction de la distance intermoléculaire  $r$ . Le premier modèle de force intermoléculaire proposé par Maxwell (Maxwellian Model) avec une dépendance en  $r^{-5}$ , est très connu. D'autres modèles ont été adoptés pour les gaz raréfiés. La figure 1.4 représente une classification de ces modèles d'interaction moléculaire.

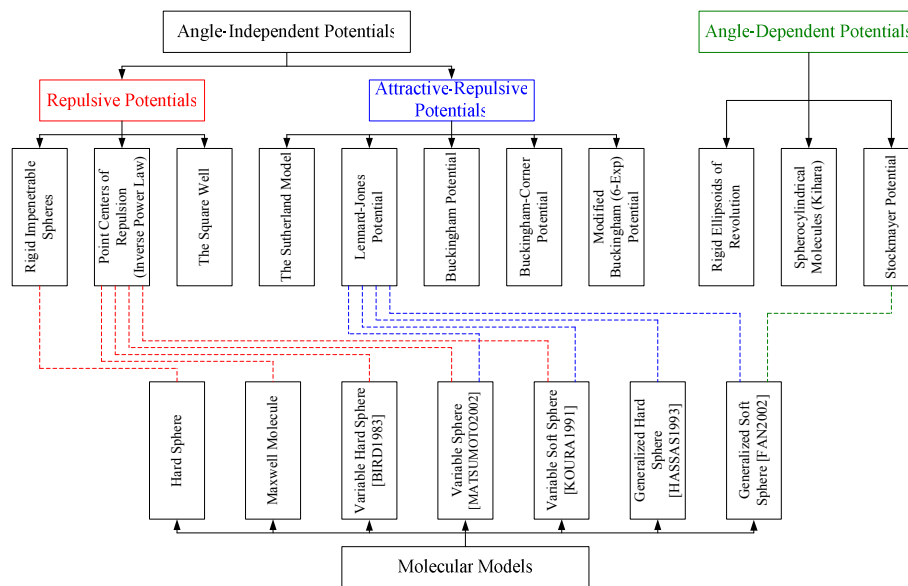


Figure 1.4 : Classification des modèles de collision intermoléculaires

Deux molécules s'attirent faiblement quand elles sont éloignées l'une de l'autre et se repoussent fortement quand elles sont proches. Les modèles de forces intermoléculaires qui sont fréquemment utilisés considèrent la partie répulsive seule, ou prennent également en compte la partie attractive. Le modèle le plus simple est le modèle de sphère rigide impénétrable « hard sphere ; HS ». La force d'interaction dérive alors d'un potentiel intermoléculaire  $\phi$  représenté sur la figure 1.5 et défini par

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \infty & r < \sigma_d \\ \phi(r) &= 0 & r > \sigma_d \end{aligned} \quad (1.8)$$

où  $r$  est la distance entre les deux centres des molécules et  $\sigma_d$  est le diamètre moyen de la molécule supposée sphérique. Un modèle plus précis est le modèle de puissance inverse « inverse power law ; IPL », pour lequel

$$\phi(r) = \frac{\kappa}{r^\delta} \quad (1.9)$$

où  $\kappa$  et  $\delta$  sont deux constantes. Pour  $\delta \rightarrow \infty$  et  $\delta = 5$ , on retrouve respectivement les modèles de sphères rigides et de Maxwell. La même démarche peut être appliquée à la partie attractive de la force et de son potentiel. Ainsi, dans le modèle de Sutherland, le potentiel intermoléculaire s'écrit

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \infty & r < \sigma_d \\ \phi(r) &= -\frac{\kappa'}{r^\gamma} & r > \sigma_d \end{aligned} \quad (1.10)$$

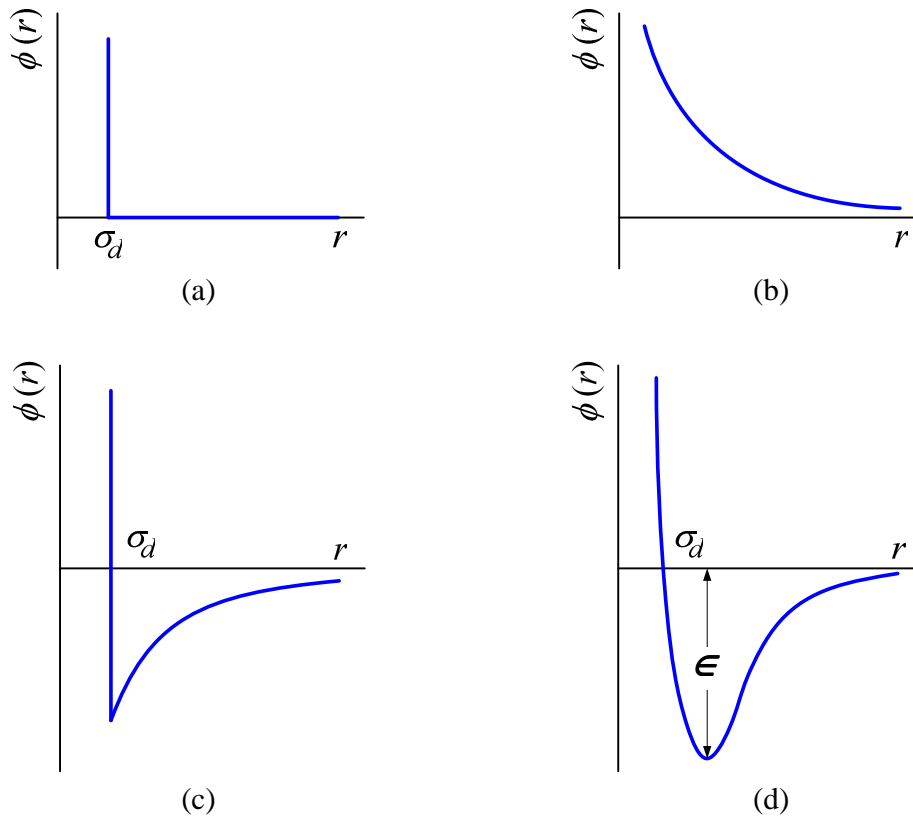
La combinaison des équations (1.9) et (1.10) conduit au modèle plus réaliste

$$\phi(r) = \frac{\kappa}{r^\delta} - \frac{\kappa'}{r^\gamma} \quad (1.11)$$

Ce modèle a été introduit par Lennard-Jones en 1924. Un cas particulier est connu sous le nom de potentiel (6-12) de Lennard-Jones [7] et s'écrit

$$\phi(r) = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma_d}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma_d}{r} \right)^6 \right], \quad (1.12)$$

où  $\epsilon$  est le minimum du potentiel qui apparaît à  $r = 2^{1/6}\sigma_d$  et  $\sigma_d$  est la valeur de  $r$  pour laquelle  $\phi(r) = 0$  (voir figure 1.5d).



**Figure 1.5 :** Potentiels intermoléculaires.

- (a) Sphère rigide impénétrable. (b) Modèle en loi de puissance inverse.  
 (c) Modèle de Sutherland. (d) Modèle de Lennard-Jones [7].

En 1983, Bird [8] a introduit le concept de modèle de sphère rigide variable « Variable Hard Sphere ; VHS » associé à un potentiel intermoléculaire en loi de puissance inverse « Inverse Power Law ; IPL » qui conduit à une définition de libre parcours moyen. Le modèle de collision s'appuie sur un modèle de sphère dure, mais le diamètre de la zone effective de collision dépend de la vitesse relative des molécules considérées selon une loi de puissance inverse avec un exposant qui dépend du gaz considéré. Ce modèle peut être utilisé dans la simulation d'écoulements par la méthode de Simulation Directe de Monte Carlo (DSMC). Koura et Matsumoto ont affiné ce modèle en 1991, en introduisant la notion de sphère molle variable « Variable Soft Sphere ; VSS » associée aux interactions de type IPL et Lennard-Jones [9]. En 1992, Hassan et Hash ont développé le modèle de sphère dure généralisée « Generalized Hard

Sphere ; GHS » adapté à la simulation des mélanges gazeux par la méthode de Monte Carlo [10]. Kunc, Hassan et Hash ont associé ce modèle à la force intermoléculaire de Lennard-Jones en 1994 [11]. Ce modèle associe la simplicité du modèle VHS (en termes de simulation numérique) à un potentiel d'interaction moléculaire plus complexe qui tient compte du caractère attractif de la force d'interaction. En utilisant le modèle de sphère molle et le calcul de section efficace de collision d'une sphère dure généralisée, Fan a en 2002 créé le modèle de sphère molle généralisé qui s'appuie sur des forces intermoléculaires de Lennard-Jones et de Stockmayer [12]. Récemment, Matsumoto a construit un autre modèle, dit de sphères variables « Variable Sphere ; VS », compatible avec différents types de potentiels intermoléculaires [13].

#### **1.4. Interactions gaz/paroi et dégazage**

Les interactions entre molécules de gaz et paroi jouent un rôle important dans les écoulements raréfiés. Un grand nombre de processus sont à prendre en compte. Leurs conséquences jouent un rôle prédominant dans les applications aérodynamiques à basse pression, dans les technologies du vide et également dans les écoulements internes au sein de microsystèmes.

Sont à considérer le rebond des molécules à la paroi, leur adsorption et leur désorption (voir figure 1.6).

De manière générale, le dégazage est lié à un ensemble complexe de phénomènes physiques, qui peuvent affecter certaines techniques de mesure, telles que celle présentée dans le chapitre 4.

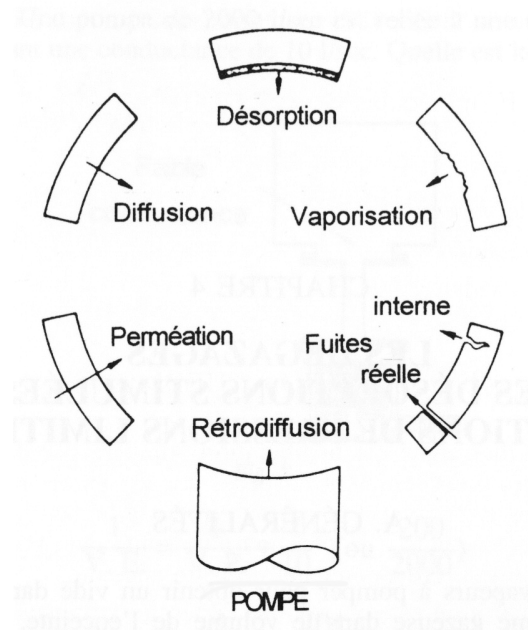


Figure 1.6 : Sources potentielles de dégazage dans un appareillage à vide [14]

#### 1.4.1. Comportement des molécules de gaz au contact d'une surface solide

Trois comportements peuvent être observés lors de la collision d'une molécule gazeuse avec une paroi immobile (voir figure 1.7) :

1. **Rebond spéculaire** : l'angle d'incidence est alors égal à l'angle de réflexion. La paroi n'exerce qu'un effort normal sur la molécule. Il s'agit d'un cas limite pour lequel la paroi apparaît plane et lisse à l'échelle de la molécule gazeuse. La vitesse ainsi que la quantité de mouvement tangentielle à la paroi sont alors inchangées (voir figure 1.7a).
2. **Rebond diffus** : si la paroi est au contraire très rugueuse à l'échelle de la molécule gazeuse, la réflexion devient diffuse. Le rebond s'effectue selon un angle aléatoire et en moyenne la quantité de mouvement tangentielle après rebond(s) est nulle (voir figure 1.7b).
3. **Piégeage** : la molécule peut perdre suffisamment d'énergie au point de s'adsorber à la paroi. Par contre, ce piégeage n'est pas nécessairement permanent. La molécule peut retrouver une énergie suffisante pour se libérer et quitte alors la surface avec une direction aléatoire.



Le comportement réel peut être considéré comme étant intermédiaire entre les comportements spéculaire et diffus. Les détails de cette loi de réflexion qui a été proposée par Maxwell seront présentés dans le chapitre 2.

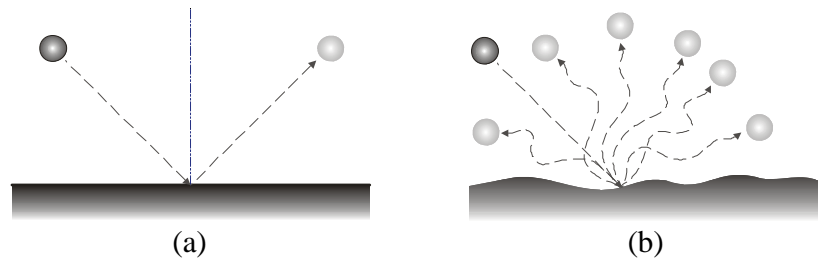


Figure 1.7 : (a) Réflexion spéculaire. (b) Réflexion diffuse.

#### 1.4.2. Adsorption et désorption

Les gaz et les vapeurs peuvent être adsorbés sur les parois internes d'une enceinte, d'un réservoir ou d'un dispositif lors de la mise à la pression atmosphérique ou à plus haute pression. Ces gaz et vapeurs peuvent ensuite être libérés sous l'effet d'un apport thermique ou d'une baisse de pression. Le taux de désorption est fonction de l'énergie de liaison des molécules, de la température de la surface, de la pression et du nombre de couches moléculaires recouvrant cette surface. Les gaz sont adsorbés sur les surfaces par [14] :

1. Physisorption : les molécules sont liées à la surface par les forces faibles de Van der Waals. La structure des molécules reste inchangée et l'attraction est purement physique.
2. Chimisorption : l'attraction comporte un échange ou partage d'électron entre la molécule de gaz et un atome de la surface. Les molécules sont liées à la surface avec des énergies chimiques supérieures à 40 kJ/mol.

Les particules physisorbées quittent facilement les surfaces solides. Par contre, les particules chimisorbées désorbent lentement. La chimisorption est responsable de la

plupart des phénomènes de dégazage [14]. De même que pour l'adsorption, il existe deux types de désorption :

1. La désorption de premier ordre : les atomes ou les molécules qui ne se dissocient pas lors de l'adsorption vont désorber à un taux proportionnel à leur concentration superficielle.
2. La désorption de deuxième ordre : les gaz diatomiques se dissocient en atomes au moment de leur adsorption et doivent se recombinaer en surface avant de désorber. Les temps nécessaires à ces désorptions seront toujours plus grands que pour les désorptions de premier ordre.

### 1.4.3. Dégazage

Le dégazage résulte d'une combinaison de phénomènes de désorption et de diffusion que l'on peut difficilement distinguer [14]. Lorsqu'on fait le vide dans une enceinte ou un réservoir, les taux de dégazage diminuent avec le temps jusqu'à atteindre un équilibre. Le banc d'essais présenté dans le chapitre 4 est sujet à ces phénomènes de dégazage, que nous chercherons à quantifier afin d'en tenir compte dans le traitement des données expérimentales (voir chapitre 5).

### Références Bibliographiques

- [1] Arkilic, E. B. (1997). "Measurement of the Mass Flow and Tangential Momentum Accommodation Coefficient in Silicon Micromachined Channels," Thèse de Doctorat. Massachusetts Institute of Technology.
- [2] Ewart, T. (2007). "Etude des écoulements gazeux isothermes en microconduits : du régime hydrodynamique au proche régime moléculaire libre," Thèse de Doctorat. Ecole Polytechnique Universitaire de Marseille, Université de Provence, Marseille.
- [3] Sharipov, F., and Seleznev, V. (1998). "Data on internal rarefied gas flow." *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 27(3), 657-706.
- [4] Colin, S. (2005). "Rarefaction and compressibility effects on steady and transient gas flows in microchannels." *Microfluidics and Nanofluidics*, 1(3), 268-279.

- [5] Oosthuizen, P. H., and Carscallen, W. E. (1997). *Compressible Fluid Flow*, McGraw-Hill.
- [6] Hadjiconstantinou, N. G. (2003). "Comment on Cercignani's second-order slip coefficient." *Physics of Fluids*, 15(8), 2352-2354.
- [7] Hirschfelder, J. O., Curtiss, C. F., and Bird, R. B. (1964). *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley.
- [8] Bird, G. A. (1983). "Definition of mean free path for real gases." *Physics of Fluids*, 26(11), 3222-3223.
- [9] Koura, K., and Matsumoto, H. (1991). "Variable soft sphere molecular model for inverse-power-law or Lennard-Jones potential." *Physics of Fluids A*, 3(10), 2459-2465.
- [10] Hassan, H. A., and Hash, D. B. (1992). "A generalized hard-sphere model for Monte Carlo simulation." *Physics of Fluids*, 5(3), 738-744.
- [11] Kunc, J. A., Hash, D. B., and Hassan, H. A. (1995). "The GHS interaction model for strong attractive potentials." *Physics of Fluids*, 7(5), 1173-1175.
- [12] Fan, J. (2002). "A generalized soft-sphere model for Monte Carlo simulation." *Physics of Fluids*, 14(12), 4399-4405.
- [13] Matsumoto, H. (2002). "Variable sphere molecular model for inverse power law and Lennard-Jones potentials in Monte Carlo simulations." *Physics of Fluids*, 14(12), 4256-4265.
- [14] Richardt, A., and Richardt, I. (1998). *La technique du vide*, Editions In Fine, Paris.



## Chapitre 2

# Régime d'écoulement glissant

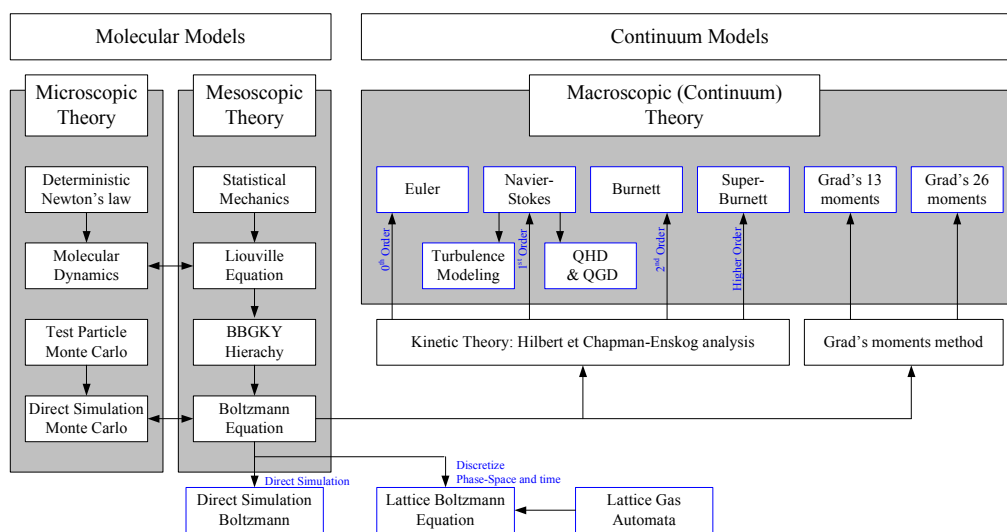
Un gaz, bien que constitué d'atomes au niveau microscopique, peut être considéré au niveau macroscopique comme un milieu continu. L'étude théorique des écoulements de gaz est normalement envisagée selon ces deux points de vue. L'approche microscopique est traitée par la théorie cinétique et généralement modélisée par l'équation de Boltzmann. L'approche macroscopique, qui considère des fonctions continues dans l'espace et le temps, est généralement basée sur les équations de Navier-Stokes et de Fourier. C'est cette approche, applicable aux régimes hydrodynamique et glissant, qui est détaillée dans ce chapitre. Nous commençons par une analyse bibliographique, puis nous détaillons les différents modèles analytiques qui peuvent être écrits pour des écoulements glissants dans des géométries simples. Pour des géométries plus complexes, nous présentons ensuite un exemple de résolution numérique à l'aide du code commercial Fluent, associé à un traitement externe spécifique des conditions aux limites.

### **2.1. Introduction : Analyse bibliographie**

Cette partie est principalement destinée à l'introduction bibliographique du régime d'écoulement glissant, et à un rappel sur les équations fondamentales et les conditions aux limites spécifiques à ce régime.

### 2.1.1. Equations générales : du moléculaire au continu

Notre travail concerne essentiellement les régimes d'écoulements glissant et de transition. La théorie cinétique des gaz, basée sur l'équation de Boltzmann, permet de traiter tous les régimes d'écoulement, de l'hydrodynamique au moléculaire libre. Cependant, en pratique, l'approche continue est très utile, car plus simple à mettre en œuvre, et peut être utilisée avec succès jusqu'au début du régime de transition. La Figure 2.1 résume les liens entre les modèles moléculaires et continus.



**Figure 2.1** : Classification des modèles théoriques

(adapté de notes de cours de Li-Shi Luo sur la méthode de Lattice Boltzmann [1]).

La théorie cinétique des gaz a été développée par Boltzmann à la suite des travaux préliminaires de Clausius et de Maxwell. Au lieu d'utiliser l'hypothèse de molécules rigides, Maxwell a proposé que les molécules se repoussent avec une force inversement proportionnelle à la puissance cinq de la distance intermoléculaire [2] (voir paragraphe 1.3). Il a également utilisé l'hypothèse précédente pour obtenir la fonction de distribution de vitesse  $f(t, \mathbf{r}, \xi)$  d'un gaz en équilibre [4]. A partir de la fonction de distribution, Boltzmann a développé l'équation qui porte son nom. L'équation de Boltzmann s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} = Q(ff_*), \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  est le vecteur position,  $\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$  est le vecteur vitesse moléculaire,  $\mathbf{F}$  est le vecteur force massique et  $Q(ff_*)$  est l'opérateur de collision. La fonction de distribution représente le nombre de molécules qui à l'instant  $t$  se trouve dans le domaine  $([\mathbf{r}; \mathbf{r} + d\mathbf{r}], [\xi; \xi + d\xi])$ . L'opérateur de collision est un opérateur intégral qui décrit le bilan des interactions des molécules et dépend du modèle d'interaction entre les molécules [5]. L'établissement et les propriétés de l'équation de Boltzmann peuvent être trouvées dans les livres traitant de la théorie cinétique des gaz [6]-[11]. A cause de la complexité de cette équation intégral-différentielle, il est impossible de résoudre analytiquement l'équation de Boltzmann avec les outils mathématiques actuels. Par conséquent, des approximations des solutions de l'équation de Boltzmann sont établies. En 1916, Hilbert a proposé une méthode d'approximation des solutions de l'équation de Boltzmann par une décomposition en série [12]. Dans la même année, Chapman et Enskog ont obtenu indépendamment des solutions approchées identiques de l'équation de Boltzmann valables pour un gaz suffisamment dense. Enskog a présenté une technique systématique qui généralise l'idée d'Hilbert. Chapman a étendu une méthode précédemment proposée par Maxwell pour obtenir les coefficients de transport [4]. La méthode d'Enskog a été adoptée par Chapman et Cowling [7], et appelée depuis lors méthode de Chapman-Enskog. Selon le raisonnement d'Hilbert-Chapman-Enskog qui utilise une technique de perturbation, la fonction de distribution est décomposée en une série de fonctions avec un petit paramètre de perturbation  $\varepsilon(Kn)$ , d'ordre 1 en  $Kn$ , de la façon suivante :

$$f_{CE} = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \varepsilon^3 f^{(3)} + \dots \quad (2.2)$$

En appliquant ce développement de la fonction de distribution à l'équation de Boltzmann, on peut en déduire le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et le vecteur  $\mathbf{q}$  flux thermique

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \boldsymbol{\sigma}^{(3)} + \dots + \boldsymbol{\sigma}^{(i)} + \mathcal{O}(Kn^{i+1}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^{(0)} + \mathbf{q}^{(1)} + \mathbf{q}^{(2)} + \mathbf{q}^{(3)} + \dots + \mathbf{q}^{(i)} + \mathcal{O}(Kn^{i+1}) \quad (2.4)$$

La prise en compte des différents ordres du développement permet, sous certaines conditions (gaz dilué), de rétablir les équations classiques de l'approche continue, les différentes grandeurs macroscopiques étant déduites d'intégrations impliquant la fonction de distribution :

- L'ordre zéro ( $i = 0$ ) correspond aux équations d'Euler.
- L'ordre un ( $i = 1$ ) correspond aux équations de Navier-Stokes-Fourier, mais aussi aux équations quasi gazo-dynamiques (QGD) et quasi hydrodynamiques (QHD), obtenues à partir d'une intégration spatio-temporelle des grandeurs microscopiques.
- L'ordre deux ( $i = 2$ ) conduit aux équations de Burnett.
- L'ordre trois ( $i = 3$ ) est utilisé pour établir les équations de Super Burnett.

Un système d'équation de conservation pour l'approche continue des écoulements gazeux consiste en trois équations aux dérivées partielles qui expriment respectivement [13][14]:

- La conservation de la masse (équation de continuité)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.5)$$

- Un bilan de quantité de mouvement

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}) + \nabla P = \mathbf{f} \quad (2.6)$$

- La conservation de l'énergie

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{E + P}{\rho} \mathbf{J} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{q} \right) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{J}$  est le vecteur flux de masse,  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes,  $\mathbf{q}$  le vecteur flux thermique et  $E$  l'énergie totale par unité de volume qui doivent s'exprimer en fonction des paramètres macroscopiques de l'écoulement : la masse volumique  $\rho$ , la vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $P$ . Les forces volumiques  $\mathbf{f}$  sont généralement négligeables pour les gaz.

En 1949, Grad a proposé une méthode de résolution approchée de l'équation de Boltzmann en décomposant la fonction de distribution en une série de polynômes



d'Hermite [15][16]. Sa méthode d'approximation des 13-moments et des 26-moments est utilisée pour les gaz à basse pression.

### 2.1.2. Les équations de base

Les développements présentés dans ce chapitre sont basés sur les équations de Navier-Stokes. En se limitant au premier ordre dans le développement de Chapman-Enskog, le vecteur flux de masse, le tenseur des contraintes et le vecteur de flux thermique sont :

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{NS} &= \rho \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma}_{NS} &= \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = 0 + \mu \left[ \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right] \\ \mathbf{q}_{NS} &= \mathbf{q}^{(0)} + \mathbf{q}^{(1)} = 0 - k \nabla T ,\end{aligned}\tag{2.8}$$

équations dans lesquelles  $\mu$  représente la viscosité dynamique et  $k$  la conductivité thermique. En introduisant le système d'équations (2.8) dans les équations (2.5)-(2.7), les équations de Navier-Stokes peuvent être déduites sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mu \left[ \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right] \right) + \nabla P &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{E + P}{\rho} \rho \mathbf{u} - \mu \left[ \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{u} - k \nabla T \right) &= 0\end{aligned}\tag{2.9}$$

en négligeant les forces volumiques  $\mathbf{f}$ .

Ces équations peuvent être appliquées à un écoulement de Poiseuille en microcanal et conduisent à une solution analytique pour un écoulement isotherme et localement pleinement développé (considéré comme localement incompressible). Ces hypothèses d'écoulement localement développé et incompressible sont précisées dans la thèse d'Aubert [17].

Les détails de la résolution des équations de Navier-Stokes en appliquant cette hypothèse à des écoulements gazeux entre deux plans parallèles, dans des microcanaux

de sections rectangulaires et triangulaires sont présentés dans les paragraphes 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3 respectivement. Les équations de Navier-Stokes doivent être associées à des conditions aux limites appropriées dans le régime de glissement. Le paragraphe suivant présente une analyse bibliographique des différentes conditions aux limites qu'il est possible d'adopter.

### 2.1.3. Conditions aux limites et coefficients de glissement

De nombreuses recherches ont été menées dans le but d'appliquer les équations continues au-delà du régime glissant. Le but est de prolonger la validité de ces équations jusque dans le régime de transition. Par une série d'expériences à basse pression menées en 1875, Kundt et Warburg sont les premiers qui ont suggéré que la vitesse à la paroi était non nulle dans un écoulement de gaz raréfié [18]. Ils ont constaté que quand un disque oscille dans un gaz à basse pression et à température constante, l'amortissement des amplitudes d'oscillation du disque est plus lent que celui prévu par un modèle continu classique d'amortissement visqueux. Ils ont suggéré que la diminution de l'amortissement était due au glissement du fluide aux interfaces gaz-solide [19]. La base théorique du concept de vitesse de glissement a été développée plus tard par Maxwell en 1878. Maxwell a proposé une explication simple du comportement du gaz à la surface d'un corps rigide qui a conduit à la première expression de la vitesse de glissement. Il a choisi de considérer la paroi comme une surface intermédiaire entre une surface spéculaire et une surface diffuse. Il a proposé qu'une fraction  $\alpha$  des molécules incidentes se réfléchit de façon diffuse, alors que la fraction  $1-\alpha$  se réfléchit de manière parfaitement spéculaire [2][3]. Le coefficient de réflexion de Maxwell  $\alpha$  est appelé coefficient d'accommodation. Quand il est nul, la réflexion est une réflexion spéculaire. Dans le cas où  $\alpha = 1$ , la réflexion est diffuse [14]. La vitesse de glissement de Maxwell peut s'écrire :

$$u_{glis.}|_{paroi} = u_{gaz} - u_{paroi} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \lambda_M \left[ \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{3}{2} \frac{\mu}{\rho T} \frac{\partial^2 T}{\partial s \partial n} \right]_{paroi} + \frac{3}{4} \left[ \frac{\mu}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial s} \right]_{paroi} \quad (2.10)$$

où  $s$  et  $n$  dénotent les directions tangentielle et perpendiculaire à la paroi. Le libre parcours moyen qu'il a utilisé est cohérent avec l'équation (1.6) et prend la forme :

$$\lambda_M = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu}{\rho\sqrt{RT}}. \quad (2.11)$$

Dans notre travail, nous avons considéré que la température des parois est uniforme. Ainsi, les deux derniers termes de l'équation (2.10) ne sont pas pris en compte. Par ailleurs, notons qu'il existe des expressions différentes du libre parcours moyen selon la manière dont on modélise les collisions intermoléculaires. L'expression (2.11) de libre parcours moyen donne une valeur proche de celle obtenue à partir d'un modèle de sphères rigides.

Suite à Maxwell, de nombreux auteurs (Smoluchowski (1898) [20], Schamberg (1947) [21], Grad (1949) [15], Kramers (1949) [22], Chapman et Cowling (1952) [7], Welander (1954) [24], Wang Chang et Uhlenbeck (1956) [25], Ziering (1960) [26], Willis (1962) [27], Albertoni et Cercignani (1963) [29], Deissler (1964) [30], Sreekanth (1969) [31], Hsia et Domoto (1983) [32], Loyalka (1990) [33], Mitsuya (1993) [34], Beskok et Karniadakis (1999) [35], Jie et al. (2000) [36], Xue et Fan (2000) [37], Sharipov (2003) [38], Hadjiconstantinou (2003-2004) [39], Dadzie (2005) [5]) ont proposé d'autres expressions de la vitesse de glissement en écoulement isotherme, souvent écrites sous la forme

$$u_{glis.}|_{paroi} = C_1 \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{paroi} - C_2 \lambda^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|_{paroi} \quad (2.12)$$

qui fait intervenir un coefficient de glissement d'ordre 1 noté  $C_1 = \beta(2 - \alpha)/\alpha$  et un coefficient de glissement d'ordre 2 noté  $C_2$ . Le second terme, dit d'ordre 2, a été introduit dans le but d'accroître la plage de validité du régime glissant vers des nombres de Knudsen plus élevés.

Une équation de glissement d'ordre deux en  $Kn$ , qui permet d'étendre les équations d'écoulement glissant à des régimes plus raréfiés, a été développée en 1947 par Schamberg. Son équation est obtenue par une solution approximée de l'équation de Boltzmann. Cependant, une simulation numérique des équations de Burnett a montré que la condition aux limites de Schamberg n'est plus précise quand  $Kn > 0,2$  [40].

La théorie des gaz raréfiés est également utilisée dans le domaine de la lubrification par couche mince de gaz. En 1959, Burgdorfer a introduit l'équation de glissement d'ordre 1 dans l'équation de Reynolds modifiée afin d'examiner l'influence du libre parcours moyen [34].

En 1963, Albertoni, Cercignani et Gotusso [41] ont proposé la condition de glissement

$$u_{glis.} \Big|_{paroi} = 1,1466 \lambda_M \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{paroi} \quad (2.13)$$

qu'ils ont obtenue à partir de l'équation de Boltzmann linéarisée, dont le terme de collision est évalué d'après le modèle de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK), en supposant des molécules de Maxwell et une réflexion diffuse à la paroi ( $\alpha = 1$ ). Le coefficient de glissement  $C_1 = 1,1466$  affine les valeurs approchées données auparavant par Welander (1954) [24], Wang Chang et Uhlenbeck (1956) [25], Willis (1962) [27] et Gross *et al.* (1957) [42]. Les valeurs numériques du coefficient sont très proches.

En 1964, soit un an plus tard, Cercignani a publié un article sur le glissement d'ordre 2. Avec le modèle BGK et l'équation de Boltzmann linéarisée, il a obtenu l'équation [43][44]

$$u_{glis.} \Big|_{paroi} = 1,146 \lambda_M \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{paroi} - 0,976 \lambda_M^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{paroi}, \quad (2.14)$$

qui généralise l'équation (2.13), toujours pour une réflexion diffuse à la paroi.

Dans la même année, Deissler a proposé une méthode analytique pour déterminer la condition de vitesse de glissement à l'ordre 2. Sans utiliser l'équation de Boltzmann, sa méthode est basée sur un bilan tridimensionnel de quantité de mouvement. Son équation peut s'écrire sous une forme un peu différente pour le terme d'ordre 2 :

$$u_{glis.} \Big|_{paroi} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{paroi} - \frac{9}{16} \lambda^2 \left[ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{paroi} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \Big|_{paroi} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{paroi} \right] \quad (2.15)$$

où  $n$ ,  $s$  et  $t$  dénotent les directions normale, longitudinale et transversale à la paroi [30].

En 1969, Sreekanth a comparé ses mesures expérimentales sur la perte de pression le long d'une conduite avec les solutions des équations de Cercignani et Deissler. Il a trouvé un bon accord avec un modèle de glissement au second ordre et un coefficient de glissement  $C_2$  égal à 0,14 [31].

En 1966 et 1978, Sone a proposé des valeurs du coefficient de glissement au premier ordre d'après une analyse basée sur l'équation de Boltzmann [45]. Ses résultats ont été comparés avec les résultats d'une autre méthode qu'il a développée avec ses collègues Ohwada et Aoki en 1989 pour un écoulement de Couette [46] et de Poiseuille [47]. Il s'agit d'une analyse numérique de l'équation de Boltzmann par une méthode de différences finies. Ces données ont également été comparées avec les résultats de données expérimentales de Reynolds *et al.* (1974) [48], les simulations développées par Loyalka (1975) [49] et par Bird (1977) [50]. Les résultats de l'équipe de Sone relatifs à l'écoulement de Couette montrent que les méthodes qu'ils ont proposées en 1978 et 1989, de même que le modèle de Loyalka basé sur une hypothèse de sphères rigides, donnent des résultats très proches des résultats expérimentaux de Reynolds *et al.*, tandis que les résultats de Bird sous-estiment les mesures expérimentales.

Hsia et Domoto, en 1983, ont proposé des coefficients de vitesse de glissement d'ordres 1 et 2 égaux respectivement à 1 et -1/2 [32].

Loyalka a calculé en 1989 les coefficients de glissement à l'aide de modèles de forces intermoléculaires de Lennard-Jones (12-6) et  $(n(r)-6)$ , la puissance du terme d'attraction  $n$  étant variable en fonction de la distance intermoléculaire  $r$  (voir équations (1.11) et (1.12)) [33].

En s'intéressant à des problèmes de lubrification par couche mince de gaz, Mitsuya a appliqué, à l'équation de Reynolds modifiée, une condition de vitesse de glissement dite d'ordre 1,5 [34]. Son équation de glissement s'écrit

$$u_{glis.} \Big|_{paroi} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{paroi} - \frac{2}{9} \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{paroi} . \quad (2.16)$$

En analysant les débits déduits de cette équation, Mitsuya a trouvé des caractéristiques intermédiaires entre celles correspondant à des conditions de glissement d'ordre 1 de Maxwell et d'ordre 2 de Hsia et Domoto, d'où le nom d'ordre 1,5, bien qu'il s'agisse en réalité d'une condition de glissement du second ordre.

Pour éviter la difficulté d'implémenter des conditions aux limites faisant intervenir une dérivée seconde du type  $\partial^2 u / \partial n^2$ , Beskok et Karniadakis ont proposé une équation de vitesse de glissement d'ordres supérieurs n'impliquant qu'une dérivée première  $\partial u / \partial n$  :

$$u_{glis.}^* \Big|_{paroi} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{Kn}{1-B(Kn)Kn} \frac{\partial u^*}{\partial n^*} \Big|_{paroi} . \quad (2.17)$$

Dans cette équation écrite sous forme adimensionnelle,  $B(Kn)$  est un coefficient déterminé empiriquement, selon des considérations théoriques, ou à l'aide de l'équation de Boltzmann linéarisée ou de la DSMC (Direct Simulation Monte Carlo) [51].

En 2000, Jie *et al.* proposent une autre équation de la vitesse de glissement :

$$u_{glis.}^* \Big|_{paroi} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \left[ Kn \frac{\partial u^*}{\partial n^*} \Big|_{paroi} + \frac{Kn}{2} \left( Re \frac{\partial P^*}{\partial s^*} \right)_{paroi} \right] \quad (2.18)$$

qui permet a priori une meilleure stabilité numérique par rapport au modèle présenté par Beskok et Karniadakis, pour des résultats sensiblement similaires [36].

Dans la même année, Xue et Fan [37] ont développé un autre modèle de la vitesse de glissement à la paroi basée sur la méthode de Chapman Enskog. Ils ont proposé de développer la fonction de distribution de la vitesse à l'aide d'une tangente hyperbolique:

$$f = f^{(0)} + \tanh(Kn) \cdot f^{(1)} + O[\tanh(Kn)] \quad (2.19)$$

où  $f^{(0)}$  est la distribution Maxwellienne pour en gaz en équilibre. L'expression de la vitesse de glissement adimensionnelle peut alors s'écrire :

$$u_{glis.}^* \Big|_{paroi} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \tanh(Kn) \frac{\partial u^*}{\partial n^*} \Big|_{paroi} . \quad (2.20)$$

Les auteurs ont comparé les profils de pression et vitesse obtenus avec un calcul analytique d'ordre 1 proposé par Arkilic [52] et une simulation statistique de type DSMC. Les résultats des trois méthodes sont très proches lorsque le nombre de Knudsen est inférieur à 0,1. Lorsque la raréfaction augmente, la méthode de Xue et Fan suit correctement les profils de vitesse et de pression calculés par la DSMC, tandis que la méthode analytique d'ordre 1 dévie de façon significative.

En 2003, Sharipov *et al.* [38] ont proposé une méthode basée sur le modèle de McCormack afin de calculer le coefficient de glissement pour un mélange de gaz monoatomiques. Son équation de vitesse de glissement s'écrit

$$u_{glis.} \Big|_{paroi} = C_p \frac{\mu \tilde{\xi}}{P} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{paroi} \quad (2.21)$$

où  $\tilde{\xi} = (2k_B T/m)^{1/2}$  est la vitesse moléculaire la plus probable et  $C_p$  le coefficient de glissement visqueux. Pour  $C_p = \sqrt{\pi} (2-\alpha)/(2\alpha)$ , on retombe sur l'équation isotherme de Maxwell. Les valeurs du coefficient  $C_p$  obtenues pour les modèles de sphères rigides et de Lennard-Jones sont comparées avec les résultats d'Ivchenko *et al.* [53] pour plusieurs concentrations des mélanges. Les résultats des deux méthodes sont en bon accord.

En 2003, Hadjiconstantinou [39] a modifié le coefficient de glissement d'ordre 2 correspondant à l'équation (2.14) de Cercignani, obtenue initialement à partir de l'équation de Boltzmann avec une hypothèse de sphères de Maxwell pour évaluer le terme de collisions. La correction proposée dans le papier d'Hadjiconstantinou est cohérente avec un modèle de collision relatif à des sphères rigides ; elle conduit à l'équation suivante :

$$u_{glis.}|_{paroi} = 1,1466\lambda_M \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{paroi} - 0,647\lambda_M^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|_{paroi}, \quad (2.22)$$

Hadjiconstantinou a finalement proposé une légère correction des deux coefficients de l'équation (2.22), à partir de résultats proposés par Ohwada [47], mais comme nous n'avons pas retrouvé les données citées par Hadjiconstantinou dans le papier d'Ohwada, nous ne montrons pas ici les valeurs correspondantes. Hadjiconstantinou a trouvé un bon accord avec des résultats issus de l'équation de Boltzmann linéarisée et la DSMC pour des nombres de Knudsen jusqu'à  $Kn = 0,4$ .

Dadzié [5] a donné une expression différente du coefficient de glissement d'ordre 1 dans sa thèse publiée en 2005. En modélisant la réflexion des molécules à partir de la théorie de « scattering kernel », au lieu d'utiliser une réflexion de type « diffus – spéculaire » de Maxwell, le modèle de Dadzié devrait être plus réaliste. L'équation prend la forme

$$u_{glis.}|_{paroi} = 3 \frac{\left( 2 - \gamma_D + \frac{\pi}{2} \beta_D \sqrt{\frac{T_0}{T_W}} \right)}{\left( 4 - \gamma_D + \beta_D \sqrt{\frac{T_0}{T_W}} \right)} \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{paroi} \quad (2.23)$$

où  $\beta_D = \alpha_x(1 - \alpha_y)$ ,  $\gamma_D = \alpha_y + \alpha_x(1 - \alpha_y)$  et  $\alpha_x$  et  $\alpha_y$  sont les coefficients d'accommodation normale et tangentielle,  $T_0$  et  $T_W$  sont les températures du gaz et de la paroi respectivement. Dadzié a comparé les valeurs du coefficient de glissement obtenu par son raisonnement et par l'équation de Maxwell avec les résultats expérimentaux de Porodonov *et al.* [54]. Il a montré que ses résultats sont plus proches des résultats expérimentaux.

En 1999, Aubert a proposé une méthode semi-analytique pour calculer le profil de vitesses et le débit d'un écoulement glissant dans un microcanal de section rectangulaire en utilisant les conditions aux limites d'ordre 2 de Deissler [17][55]. La méthode a été utilisée par Lalonde en 2001 qui l'a confrontée à ses mesures expérimentales [56][57]. La comparaison a permis de tirer le coefficient d'accommodation. Les résultats ont montré



que les modèles d'ordre 1 et 2 sont précis respectivement jusqu'à un nombre de Knudsen de 0,05 et 0,25, pour des microcanaux de section rectangulaire.

Dans les années 2006-2007, Ewart *et al.* ont développé une méthode expérimentale pour mesurer le débit massique de gaz du régime hydrodynamique au régime moléculaire libre à l'aide d'une mesure de la variation de pression dans un réservoir. En comparant les données des mesures avec les théories analytiques d'écoulement glissant à l'ordre deux, les valeurs des coefficients de glissement et d'accommodation ont pu être extraites [58][59][60][61].

En 2008, Weng et Chen [62] ont résolu les équations de Navier-Stokes pour l'écoulement glissant entre deux plaques planes associées à la condition aux limites proposée par Lockerby *et al.* (2004) [63], pour laquelle  $\beta=1$  et  $C_2 = \frac{9}{4\pi} Pr \frac{\gamma-1}{\gamma}$ . Ici,  $Pr$  et  $\gamma$  sont le nombre de Prandtl et le rapport des capacités thermiques. Weng et Chen ont comparé leurs résultats avec la solution analytique basée sur des conditions aux limites d'ordre 1 et 2 et également avec les résultats expérimentaux de Maurer *et al.* [64] et Ewart *et al.* [60]. Les comparaisons montrent que cette méthode est valable jusqu'à un nombre de Knudsen de 1,6.

Récemment, dans le premier congrès européen de microfluidique, Cercignani et Lorenzani ont résolu le problème de l'écoulement de Poiseuille entre deux plaques parallèles à l'aide d'une méthode variationnelle appliquée à l'équation de Boltzmann. Cette méthode peut être utilisée avec n'importe quel modèle de Boltzmann linéarisé alors que les autres méthodes variationnelles ne peuvent être appliquées qu'avec des modèles spécifiques tels que le modèle BGK. Elle permet également d'extraire les premier et deuxième coefficients de glissement [65].

En résumé, pour un écoulement isotherme bidimensionnel, les équations précédentes de vitesse de glissement à la paroi peuvent s'écrire sous la forme générale

$$u_{glis.}^* \Big|_{paroi} = C_1 Kn \frac{\partial u^*}{\partial n^*} \Big|_{paroi} - C_2 Kn^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial n^{*2}} \Big|_{paroi} \quad (2.24)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont les coefficients d'accommodation à l'ordre 1 et 2 introduits dans l'équation (2.12), avec  $C_1 = \beta(2 - \alpha)/\alpha$ . Les valeurs de  $\beta$  et  $C_2$  proposés dans la littérature sont présentés dans le Tableau 2.1.

Auteur, année	$\beta$	$C_2$	Type d'étude
Maxwell, 1879 [3]	1	-	Théorique
Schamberg, 1947 [21]	1	$5\pi/2$	Théorique
Chapman and Cowling, 1952 [7]	$\kappa_0 (\approx 1)$	$-\kappa_0^2/2 (\approx -1/2)$	Théorique
Welander, 1954 [24]	1,23	-	Théorique – BGK
Wang Chang et Uhlenbeck, 1956 [25]	1,134	-	Théorique – Maxwell
Willis, 1962 [27]	1,142	-	Théorique – BGK
Albertoni <i>et al.</i> , 1963 [29]	1,1466	-	Théorique – BGK
Cercignani, 1964 [43]	1,1466	0,9756	Théorique – BGK
Deissler, 1964 [30]	1	9/8	Théorique
Porodnov <i>et al.</i> , 1974 [54]	$1,416 \pm 0,009$ $1,332 \pm 0,059$	-	Expérimental – Hélium Expérimental – Argon
Sreekanth, 1969 [31]	1,1466	0,14	Expérimental
Hsia and Domoto, 1983 [32]	1	1/2	Théorique
Mitsuya, 1993 [34]	1	2/9	Théorique
Maurer <i>et al.</i> , 2003 [64]	1	$0,23 \pm 0,1$	Expérimental – Hélium $\alpha = 0,91 \pm 0,03$
Hadjiconstantinou, 2003 [39]	1	$0,26 \pm 0,1$	Expérimental – Azote $\alpha = 0,87 \pm 0,03$
Lockerby <i>et al.</i> , 2004 [63]	1	$\frac{9}{4\pi} Pr \frac{\gamma-1}{\gamma}$	Maxwell-Burnett
Sharipov, 2003 [38]	Dépend du coefficient d'accommodation		Théorique
Ewart <i>et al.</i> , 2006 [58]	$1,490 \pm 0,111$	$0,408 \pm 0,097$	Expérimental – Azote

Tableau 2.1 : Coefficients de glissement proposés dans la littérature.

## 2.2. Calculs analytique et semi-analytique de vitesses et débits

### 2.2.1. Ecoulement entre deux plans parallèles

On considère un microcanal de longueur  $L$  dont la largeur  $B$  est très grande devant la profondeur  $H$ . Par conséquent, la distribution de vitesse selon la largeur peut être

considérée uniforme. Le système de coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  est utilisé. Les coordonnées adimensionnelles  $(x^* = x/L, y^* = y/h)$  sont également introduites.

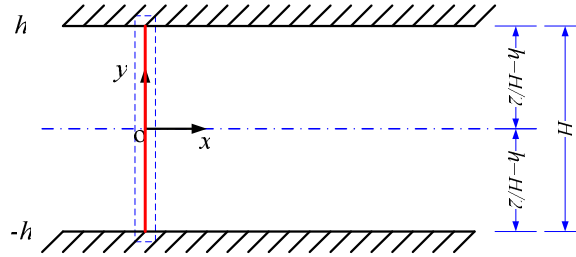


Figure 2.2 : Géométrie du microcanal et notations.

Sous les hypothèses du paragraphe 2.1.2., les équations de Navier-Stokes se réduisent ici à

$$\frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx}. \quad (2.25)$$

La condition aux limites d'écoulement glissant sous sa forme générale est

$$u_{glis.}|_{paroi} = C_1 \lambda \frac{\partial u_x}{\partial n} - C_2 \lambda^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial n^2}. \quad (2.26)$$

où le coefficient de glissement à l'ordre 1 est défini par  $C_1 = \beta(2 - \alpha)/\alpha$ . A la paroi immobile  $y = H/2 = h$ , la condition aux limites s'écrit

$$u_x|_{y=h} = -C_1 \lambda \frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_{y=h} - C_2 \lambda^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \Big|_{y=h}. \quad (2.27)$$

Sur l'axe de symétrie  $y = 0$ , on peut appliquer la condition

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (2.28)$$

En appliquant les conditions aux limites (2.27)-(2.28) à l'équation (2.25), l'expression de la vitesse  $u_x$  dans une section droite s'écrit par conséquent sous la forme suivante :

$$u_x = \frac{h^2}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left( \frac{y^2}{h^2} - 1 - 2C_1 \frac{\lambda}{h} - 2C_2 \frac{\lambda^2}{h^2} \right). \quad (2.29)$$

Pour les nombres de Knudsen

$$Kn = \lambda/D_H = \lambda/4h \quad (2.30)$$

basé sur le diamètre hydraulique  $D_H$  et

$$Kn' = \lambda/L_{\min} = \lambda/2h \quad (2.31)$$

basé sur la plus petite dimension, l'expression de la vitesse  $u_x$  s'écrit

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} + 8C_1 Kn + 32C_2 Kn^2 \right) \\ &= -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left( 1 - \frac{y^2}{h^2} + 4C_1 Kn' + 8C_2 Kn'^2 \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

La vitesse moyenne  $\bar{u} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_x dy$  s'écrit alors

$$\bar{u} = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{2}{3} + 8C_1 Kn + 32C_2 Kn^2 \right) = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{2}{3} + 4C_1 Kn' + 8C_2 Kn'^2 \right). \quad (2.33)$$

Le débit volumique s'écrit quant à lui

$$Q = -\frac{Bh^3}{\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{2}{3} + 8C_1 Kn + 32C_2 Kn^2 \right) = -\frac{Bh^3}{\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{2}{3} + 4C_1 Kn' + 8C_2 Kn'^2 \right). \quad (2.34)$$

et le débit massique  $\dot{m} = \rho Q = (P/RT)Q$  s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{m} &= -\frac{Bh^3}{\mu} \frac{P}{RT} \frac{dp}{dx} \left( \frac{2}{3} + 8C_1 Kn + 32C_2 Kn^2 \right) \\ &= -\frac{Bh^3}{\mu} \frac{P}{RT} \frac{dp}{dx} \left( \frac{2}{3} + 4C_1 Kn' + 8C_2 Kn'^2 \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

En écoulement permanent isotherme, le produit  $Kn(x)P(x)$  est constant, ce qui revient à écrire que [17]

$$Kn P = Kn_o P_o \quad (2.36)$$

d'où

$$\int_0^L \dot{m} dx = -\frac{Bh^3}{\mu} \frac{1}{RT} \int_{P_i}^{P_o} \left( \frac{2}{3} P + 8C_1 Kn P + 32C_2 Kn^2 P \right) dP \quad (2.37)$$

en notant par un indice  $o$  la sortie et par un indice  $i$  l'entrée du canal. En substituant l'équation (2.36) dans l'équation (2.37), le débit massique le long de canal s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{m} &= -\frac{B h^3 P_o^2}{\mu L R T} \left( \frac{\Pi^2 - 1}{3} + 8 C_1 K n_o (\Pi - 1) + 32 C_2 K n_o^2 \ln \Pi \right) \\ &= -\frac{B h^3 P_o^2}{\mu L R T} \left( \frac{\Pi^2 - 1}{3} + 4 C_1 K n'_o (\Pi - 1) + 8 C_2 K n_o'^2 \ln \Pi \right)\end{aligned}\quad (2.38)$$

où  $\Pi = P_i/P_o$ .

La distribution de vitesse, la vitesse moyenne et le débit massique sous forme adimensionnelle s'écrivent [14] :

$$u^* = 1 - \frac{y^2}{h^2} + 8 C_1 K n + 32 C_2 K n^2 = 1 - \frac{y^2}{h^2} + 4 C_1 K n'_o + 8 C_2 K n_o'^2, \quad (2.39)$$

$$\bar{u}^* = \frac{2}{3} + 8 C_1 K n + 32 C_2 K n^2 = \frac{2}{3} + 4 C_1 K n'_o + 8 C_2 K n_o'^2, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned}\dot{m}^* &= 1 + 24 C_1 \frac{K n_o}{(\Pi + 1)} + 96 C_2 K n_o^2 \frac{\ln \Pi}{(\Pi^2 - 1)} \\ &= 1 + 12 C_1 \frac{K n'_o}{(\Pi + 1)} + 24 C_2 K n_o'^2 \frac{\ln \Pi}{(\Pi^2 - 1)}.\end{aligned}\quad (2.41)$$

La vitesse est adimensionnalisée par la vitesse locale de référence  $u_0 = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dz}$  au centre du microcanal ( $y=0$ ) pour un écoulement sans glissement et le débit massique est adimensionnalisé par le débit massique de l'écoulement sans glissement

$\dot{m}_{non\ glis.} = -\frac{B h^3 P_o^2}{\mu L R T} \left( \frac{\Pi^2 - 1}{3} \right)$ . On peut également écrire la vitesse et le débit

adimensionnés en fonction du paramètre de raréfaction  $\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{K n} = \frac{P D_H}{\mu \xi}$

ou  $\delta' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{K n'_o} = \frac{P H}{\mu \xi}$  :

$$u^* = 1 - y^{*2} + 4\sqrt{\pi} C_1 \frac{1}{\delta} + 8\pi C_2 \frac{1}{\delta^2} = 1 - y^{*2} + 2\sqrt{\pi} C_1 \frac{1}{\delta'} + 2\pi C_2 \frac{1}{\delta'^2} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
 m^* &= 1 + 12\sqrt{\pi} C_1 \frac{1}{\delta_o'(\Pi + 1)} + 24\pi C_2 \frac{\ln \Pi}{\delta_o'^2(\Pi^2 - 1)} \\
 &= 1 + 6\sqrt{\pi} C_1 \frac{1}{\delta_o'(\Pi + 1)} + 6\pi C_2 \frac{\ln \Pi}{\delta_o'^2(\Pi^2 - 1)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.43}$$

### 2.2.2. Ecoulement dans les canaux de section rectangulaire

On considère maintenant un microcanal de section rectangulaire avec une largeur  $B = 2b$ , une profondeur  $H = 2h$  et une longueur  $L$ . Le rapport de forme de la section est défini par  $a^* = h/b = H/B$  où la profondeur  $H$  est la plus petite dimension. Le repère de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  est utilisé. La largeur et la profondeur de la section

sont donc définies par  $-\frac{B}{2} \leq x \leq \frac{B}{2}$  et  $-\frac{H}{2} \leq y \leq \frac{H}{2}$ . Les coordonnées adimensionnelles

$\left(x^* = \frac{x}{b}, y^* = \frac{y}{h}, z^* = \frac{z}{L}\right)$  sont également introduites.

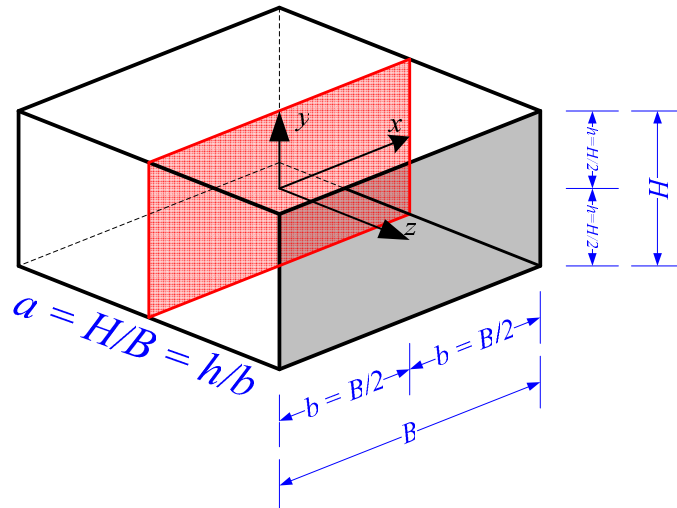


Figure 2.3 : Géométrie et notations pour un microcanal de section rectangulaire.

Les équations de Navier-Stokes sont réduites à

$$\frac{d^2 u_z}{dy^2} + \frac{d^2 u_z}{dx^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} \quad (2.44)$$

La condition aux limites de l'écoulement glissant s'écrit sous la forme générale

$$\begin{aligned} u_z \Big|_{x=\pm \frac{B}{2}} &= \mp C_1 \lambda \frac{\partial u_z}{\partial x} \Big|_{x=\pm \frac{B}{2}} - C_2 \lambda^2 \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=\pm \frac{B}{2}} \\ u_z \Big|_{y=\pm \frac{H}{2}} &= \mp C_1 \lambda \frac{\partial u_z}{\partial y} \Big|_{y=\pm \frac{H}{2}} - C_2 \lambda^2 \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=\pm \frac{H}{2}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

En adoptant le raisonnement de Deissler [30]. On peut calculer la vitesse et le débit par une méthode semi-analytique [17]. L'équation générique de la vitesse prend alors la forme

$$\begin{aligned} u_z = & -\frac{h^2}{\mu L} \frac{dp}{dz^*} \left\{ \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(\varphi_i^2 + \psi_j^2)} \left[ \frac{4 \sin\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right) \sin(\psi_j)}{\varphi_i \psi_j} + 4 \frac{C_2}{C_1} Kn' \cos(\psi_j) \frac{\sin\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right)}{\varphi_i} \right. \right. \right. \\ & + 4 \frac{C_2}{C_1} Kn' \cos\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right) \frac{\sin(\psi_j)}{\psi_j} \left. \left. \right] \times \left[ \left( \frac{1}{a^*} + \frac{\cos\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right) \sin\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right)}{\varphi_i} \right) \left( 1 + \frac{\cos(\psi_j) \sin(\psi_j)}{\psi_j} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{C_2}{C_1} Kn' \cos^2(\psi_j) \left( \frac{1}{a^*} + \frac{\cos\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right) \sin\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right)}{\varphi_i} \right) + 2 \frac{C_2}{C_1} Kn' \cos^2\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right) \left( 1 + \frac{\cos(\psi_j) \sin(\psi_j)}{\psi_j} \right) \right]^{-1} \right. \\ & \left. \times \cos\left(\varphi_i \frac{x}{h}\right) \cos\left(\psi_j \frac{y}{h}\right) \right] + 2C_2 Kn'^2 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Pour déterminer les racines  $\varphi_i$  et  $\psi_i$ , il est nécessaire de résoudre numériquement les équations transcendantes :

$$1 - 2Kn' C_1 \psi_j \tan(\psi_j) - 2C_2 Kn' \psi_j^2 = 0 \quad (2.47)$$

$$1 - 2Kn' C_1 \varphi_i \tan\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right) - 2C_2 Kn' \varphi_i^2 = 0. \quad (2.48)$$

Le débit massique à travers une section est défini par

$$\dot{m} = \iint \rho u_z dx dy \quad (2.49)$$

En substituant l'équation (2.46) dans l'équation (2.49), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{m} = & -\frac{\rho h^2}{\mu L} \frac{dp}{dz^*} \frac{4h^2}{a^*} \left\{ \sum_{i,j=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(\varphi_i^2 + \psi_j^2)} \left[ \frac{4 \sin\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right) \sin(\psi_j)}{\varphi_i \psi_j} + 4 \frac{C_2}{C_1} Kn' \cos(\psi_j) \frac{\sin\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right)}{\varphi_i} \right. \right. \right. \\ & + 4 \frac{C_2}{C_1} Kn' \cos\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right) \frac{\sin(\psi_j)}{\psi_j} \left. \left. \left. \right] \times \left[ \left( \frac{1}{a^*} + \frac{\cos\left(\frac{\varphi_i}{a}\right) \sin\left(\frac{\varphi_i}{a}\right)}{\varphi_i} \right) \left( 1 + \frac{\cos(\psi_j) \sin(\psi_j)}{\psi_j} \right) \right. \right. \\ & + 2 \frac{C_2}{C_1} Kn' \cos^2(\psi_j) \left( \frac{1}{a^*} + \frac{\cos\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right) \sin\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right)}{\varphi_i} \right) + 2 \frac{C_2}{C_1} Kn' \cos^2\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right) \left( 1 + \frac{\cos(\psi_j) \sin(\psi_j)}{\psi_j} \right) \left. \right]^{-1} \\ & \left. \times \frac{a \sin\left(\frac{\varphi_i}{a^*}\right) \sin(\psi_j)}{\varphi_i \psi_j} \right] + 2C_2 Kn'^2 \left. \right\} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Pour calculer le débit massique en fonction des pressions à l'amont  $P_i$  et à l'aval  $P_o$ , l'équation (2.50) doit être intégrée le long du canal. Lorsque l'écoulement est isotherme, le nombre de Knudsen ne dépend que de la pression, laquelle varie le long du canal. Par conséquent, les racines  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  dépendent de la position  $z$  dans le canal. Une fonction d'approximation polynômiale  $a_1 + a_2 Kn' + a_3 Kn'^2$  est utilisée pour remplacer le terme entre accolades de l'équation (2.50). On obtient alors [30]

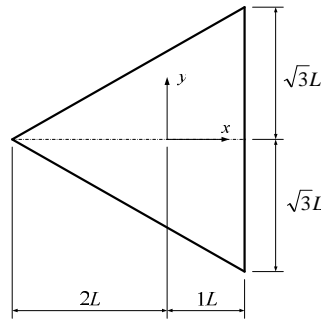
$$\dot{m} = -\frac{4h^4}{a^* \mu L} \frac{P_o^2}{RT} \left( \frac{a_1 (\Pi^2 - 1)}{2} + a_2 Kn_o (\Pi - 1) + a_3 Kn_o^2 \ln \Pi \right) \quad (2.51)$$

où  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  dépendent des coefficients de glissement et du rapport de forme. Les valeurs de ces coefficients sont tabulées dans [14].



### 2.2.3. Ecoulement dans les canaux de section triangulaire équilatérale

On considère un microcanal de section triangulaire équilatérale, de largeur  $2\sqrt{3}L$  et de hauteur  $3L$ . L'origine du repère cartésien  $(O, x, y, z)$  est placée au centre de la section de sorte que  $x \in [-2L, L]$  et  $y \in [0, 2\sqrt{3}L]$ .



**Figure 2.4 :** Microcanal de section triangulaire équilatérale.

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, les équations de Navier-Stokes deviennent

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz}. \quad (2.52)$$

#### 2.2.3.1. Ecoulement sans glissement

La solution de l'équation de Poisson (2.52) dans ce type de section avec des conditions aux limites de Dirichlet est bien connue. En effet, le profil de vitesses dans la section triangulaire équilatérale peut être cherché sous la forme

$$u_z = \chi(x-L)(x-\sqrt{3}y+2L)(x+\sqrt{3}y+2L) \quad (2.53)$$

qui vérifie automatiquement les conditions limites de non glissement aux parois. Ainsi,

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \chi(6x+6L) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \chi(-6x+6L). \quad (2.54)$$

En substituant l'équation (2.54) dans l'équation (2.52), on obtient alors

$$\chi = \frac{1}{12L} \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz}. \quad (2.55)$$

Finalement, on trouve l'expression de la vitesse :

$$u_z = \frac{1}{12L} \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} (x^3 - 3xy^2 + 3Lx^2 + 3y^2L + 4L^3). \quad (2.56)$$

On introduit les variables adimensionnelles

$$x^* = \frac{x}{L} ; \quad y^* = \frac{y}{L} ; \quad u_z^* = \frac{u_z}{u_0} \quad (2.57)$$

où la vitesse de référence  $u_0 = -\frac{L^2}{\mu} \frac{dp}{dz}$ . La vitesse adimensionnalisée s'écrit alors :

$$u_z^* = -\frac{1}{12} (x^{*3} - 3x^*y^{*2} + 3x^{*2} + 3y^{*2} + 4). \quad (2.58)$$

### 2.2.3.2. Ecoulement glissant d'ordres 1 et 2

Pour résoudre le problème avec des conditions limites de glissement, on introduit d'abord les coordonnées adimensionnelles dans l'équation (2.52) de bilan de quantité de mouvement, qui devient

$$\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial x^{*2}} = -1 \quad (2.59)$$

Comme l'a montré Wang [66], on peut trouver une solution de cette équation en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  qui vérifie la symétrie ternaire du problème, sous la forme :

$$u_z^* = -\frac{1}{4} r^{*2} + A^* + B^* \cos(3\theta^*) r^{*3} \quad (2.60)$$

où,  $A^*$  et  $B^*$  sont des constantes. L'équation (2.60) s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$u_z^* = -\frac{1}{4} (x^{*2} + y^{*2}) + A^* + B^* (x^{*3} - 3x^*y^{*2}). \quad (2.61)$$

La condition aux limites de glissement au premier ordre est écrite sous forme adimensionnelle sur la frontière  $\Gamma$  :

$$u_z^* \Big|_{\Gamma} = C_{1\lambda}^* \frac{\partial u_z^*}{\partial n^*} \Big|_{\Gamma} \quad (2.62)$$

où le coefficient  $C_{1\lambda}^*$  est défini par  $C_{1\lambda}^* = C_1 \frac{\lambda}{L} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \beta \frac{\lambda}{L}$ . La vitesse de glissement à la paroi  $x^* = 1$  s'écrit donc

$$u_z^* \Big|_{x^*=1} = -C_{1\lambda}^* \frac{\partial u_z^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1}. \quad (2.63)$$

En injectant l'équation (2.61) dans l'équation (2.63), on obtient

$$\left( -\frac{1}{4} - 3B^* - 3B^* C_{1\lambda}^* \right) y^{*2} - \frac{1}{4} + A^* + B^* - \frac{C_{1\lambda}^*}{2} + 3B^* C_{1\lambda}^* = 0 \quad (2.64)$$

Ainsi, en  $y^* = 0$ , on obtient

$$A^* = \frac{1}{4} + \frac{C_{1\lambda}^*}{2} - B^* (1 + 3C_{1\lambda}^*). \quad (2.65)$$

et en  $y^* = \sqrt{3}$ ,

$$\left( -\frac{3}{4} - 9B^* - 9B^* C_{1\lambda}^* \right) - \frac{1}{4} + A^* + B^* - \frac{C_{1\lambda}^*}{2} + 3B^* C_{1\lambda}^* = 0. \quad (2.66)$$

Avec les équations (2.65) et (2.66), on obtient les coefficients  $A^*$  et  $B^*$  :

$$A^* = \frac{2 + 6 C_{1\lambda}^* + 3 C_{1\lambda}^{*2}}{6(1 + C_{1\lambda}^*)} \quad ; \quad B^* = -\frac{1}{12(1 + C_{1\lambda}^*)} \quad (2.67)$$

Ainsi, la vitesse adimensionnelle dans un microcanal de section triangulaire équilatérale avec des conditions aux limites de glissement d'ordre 1 prend la forme :

$$u_z^* = -\frac{1}{4} (x^{*2} + y^{*2}) + \frac{2 + 6 C_{1\lambda}^* + 3 C_{1\lambda}^{*2}}{6(1 + C_{1\lambda}^*)} - \frac{x^{*3} - 3x^* y^{*2}}{12(1 + C_{1\lambda}^*)}. \quad (2.68)$$

Le débit massique est alors donné par

$$\dot{m} = \rho \int_{-2L}^L \int_{-\frac{x-2L}{\sqrt{3}}}^{\frac{x+2L}{\sqrt{3}}} u_z^* dy dx = -\frac{3\sqrt{3}L^3 (3L^2 + 15LC_{1\lambda} + 10C_{1\lambda}^2)}{20(L + C_{1\lambda})} \frac{\rho}{\mu} \frac{dP}{dz} \quad (2.69)$$

qui se réduit à

$$\dot{m}_{non\ glis.} = \frac{9\sqrt{3}L^4}{20} \frac{\rho}{\mu} \frac{dP}{dz} \quad (2.70)$$

dans le cas de non glissement à la paroi. Sous forme adimensionnelle, le débit peut donc s'écrire :

$$\dot{m}^* = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{non\ glis.}} = - \frac{(3 + 15C_{1\lambda}^* + 10C_{1\lambda}^{*2})}{3(1 + C_{1\lambda}^*)}. \quad (2.71)$$

Nous avons étendu la solution ci-dessus trouvée par Wang [66] à des conditions aux limites du second ordre inspirées de celles de Deissler, de la forme

$$u_z^* \Big|_{\Gamma} = C_{1\lambda}^* \frac{\partial u_z^*}{\partial n^*} \Big|_{\Gamma} - C_{2\lambda}^* \left[ \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial n^{*2}} \Big|_{\Gamma} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial t^{*2}} \Big|_{\Gamma} \right] \quad (2.72)$$

où  $C_{1\lambda}^* = C_1 \frac{\lambda}{L}$  et  $C_{2\lambda}^* = C_2 \frac{\lambda^2}{L^2}$ , et  $n$  et  $t$  dénotent les directions normale et transversale à la paroi. Ainsi, les vitesses de glissement à la paroi  $x^* = 1$  s'écrivent

$$u_z^* \Big|_{x^*=1} = -C_{1\lambda}^* \frac{\partial u_z^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} - C_{2\lambda}^* \left[ \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial x^{*2}} \Big|_{x^*=1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial y^{*2}} \Big|_{x^*=1} \right] \quad (2.73)$$

A partir des équations (2.61) et (2.73), on obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} - \frac{y^{*2}}{4} + A^* + B^* - 3B^* y^{*2} - \frac{C_{1\lambda}^*}{2} + 3B^* C_{1\lambda}^* \\ & - 3B^* C_{1\lambda}^* y^{*2} - \frac{3}{4} C_{2\lambda}^* + 3B^* C_{2\lambda}^* = 0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

En  $y^* = 0$ , l'équation (2.74) donne

$$A^* = \frac{1}{4} - (1 + 3C_{1\lambda}^* + 3C_{2\lambda}^*) B^* + \frac{C_{1\lambda}^*}{2} + \frac{3}{4} C_{2\lambda}^* \quad (2.75)$$

et en  $y^* = \sqrt{3}$ ,

$$A^* - 1 - 8B^* - \frac{C_{1\lambda}^*}{2} - 6B^* C_{1\lambda}^* - \frac{3}{4} C_{2\lambda}^* + 3B^* C_{2\lambda}^* = 0. \quad (2.76)$$

A partir des équations (2.75) et (2.76), on obtient les coefficients  $A^*$  et  $B^*$  et on en déduit la vitesse adimensionnelle dans un microcanal de section triangulaire équilatérale avec des conditions aux limites d'ordre 2 :

$$u_z^* = -\frac{1}{4}(x^{*2} + y^{*2}) + A^* + B^*(x^{*3} - 3x^* y^{*2}), \quad (2.77)$$

où

$$A^* = \frac{4 + 12C_{1\lambda}^* + 12C_{2\lambda}^* + 9C_{1\lambda}^* C_{2\lambda}^* + 6C_{1\lambda}^{*2}}{12(1 + C_{1\lambda}^*)} \quad (2.78)$$

et

$$B^* = -\frac{1}{12(1 + C_{1\lambda}^*)}. \quad (2.79)$$

### 2.3. Simulations numériques à l'aide de Fluent

En dehors de sections de forme simple (telles que plaques planes, sections rectangulaire, circulaire ou triangulaire équilatérale), le problème précédent ne possède pas de solution analytique ou semi-analytique. Le recours à une résolution numérique est alors indispensable.

La Figure 2.5 représente la procédure numérique utilisée dans ce travail. Il s'agit d'un calcul numérique par la méthode des volumes finis avec le code Fluent. Gambit, le pré-processeur de Fluent, permet de définir la géométrie et de construire le maillage. Le calcul, la visualisation et le post-traitement des résultats sont faits dans Fluent. En résolvant les équations de Navier-Stokes et Fourier, ce code permet d'implémenter deux types de conditions aux limites nommées « Low Pressure Boundary Slip » (LPBS) et « Moving Wall » (MW) qui permettent de générer un glissement à la paroi. Nous avons testé ces deux types de conditions aux limites afin de discuter de leur pertinence. Une condition périodique est utilisée pour imposer un écoulement localement pleinement développé, considéré ici comme isotherme. L'influence du nombre de mailles le long de la direction de l'écoulement a été testée ; on a montré qu'il était sans influence mesurable

sur les résultats. L'écoulement est supposé laminaire et le calcul est mené en double précision avec une discrétisation au deuxième ordre pour une précision accrue.

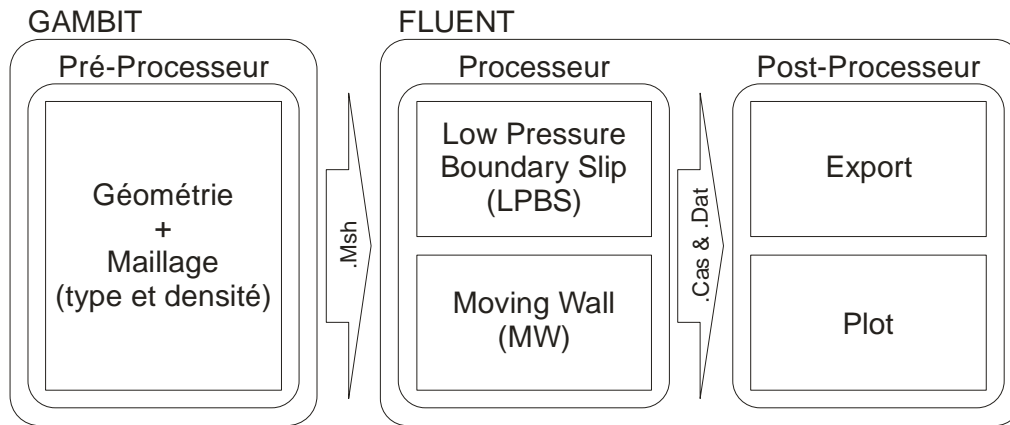


Figure 2.5 : Procédure numérique avec Gambit et Fluent.

Les résultats bruts et résultats post-traités peuvent être exportés par deux méthodes nommées « Export » et « Plot ». La méthode « Export » donne des valeurs plus précises ; elle a été retenue dans ce travail.

### 2.3.1. La méthode « Low Pressure Boundary Slip (LPBS) »

La simulation numérique d'écoulements de gaz raréfié est directement réalisable dans Fluent en utilisant la commande « *Low Pressure Boundary Slip* » (LPBS). Cependant, le choix des conditions de glissement est limité à l'équation de Maxwell avec une expression du libre parcours moyen définie par un modèle de Lennard-Jones. De plus, on a constaté que la méthode LPBS s'avérait imprécise dans les angles des sections (voir paragraphe 2.3.3). La valeur du coefficient d'accommodation peut quant à elle être choisie librement.

### 2.3.2. La méthode « Moving Wall (MW) »

Pour éviter les écueils de la méthode LPBS, on propose une autre méthode qui utilise une condition aux limites de paroi mobile notée « *Moving Wall* » (MW).

Contrairement à la méthode LPBS, la méthode MW requiert plusieurs étapes d'itération pour déterminer une valeur précise de la vitesse à la paroi. La simulation est démarrée par un calcul d'écoulement sans glissement. Le profil de vitesses obtenu en paroi permet de calculer les vitesses de glissement locales à l'aide de la condition aux limites de glissement que l'on a choisie. Ces vitesses sont appliquées à chaque cellule du maillage au contact de la paroi. Les étapes sont répétées jusqu'à ce que le profil de vitesse converge. Dans le cas d'un écoulement plan entre deux plaques parallèles, une seule itération est suffisante puisque le gradient transverse de vitesse à la paroi est le même pour les écoulements avec ou sans glissement (voir paragraphe 2.2.1). Pour les écoulements tridimensionnels dans des sections rectangulaires, triangulaires ou trapézoïdales, plusieurs itérations sont nécessaires. A chaque itération, la vitesse de glissement est calculée à partir de l'itération précédente en utilisant des conditions aux limites du premier ou du second ordre (équations (2.26), (2.45), (2.62) ou (2.72)) à l'aide de l'outil « *Custom Field Function* » sur Fluent. Pour améliorer la précision des résultats à proximité de la paroi, particulièrement dans les angles où des anomalies ont tendance à apparaître, une extrapolation des données ou une relaxation sont effectuées par un traitement approprié en dehors du code Fluent. Ces données corrigées sont ensuite réinjectées dans Fluent et appliquées cellule par cellule à la paroi en utilisant la méthode MW.

### 2.3.3. Comparaison des méthodes LPBS et MW

#### 2.3.3.1. Tests préliminaires et procédure numérique

Afin d'employer correctement les deux méthodes de simulation des écoulements dans des microcanaux de sections différentes, les procédures de calculs dans Fluent sont examinées en détail. Pour cela, un cas test d'écoulement de Poiseuille entre deux plaques planes a été étudié pour analyser les effets

- des modèles LPBS et MW,
- des méthodes de calcul du gradient de vitesse à la paroi, et
- des types de maillages.

Le cas test a pour objectif d'étudier l'écoulement non glissant (à la première itération) et l'écoulement glissant (à la seconde itération). Cette seconde itération est suffisante pour simuler l'écoulement glissant car dans le cas d'écoulement plan, les gradients de vitesse sont les mêmes pour les écoulements glissant et non glissant. Ces résultats sont comparés à la solution analytique. Le gaz utilisé pour le cas test est  $N_2$  à 300 K et les paramètres sont les suivants :

- La distance entre les deux plaques est de 1  $\mu\text{m}$ .
- La longueur du tronçon de canal simulé est de 0,01  $\mu\text{m}$ , ce qui est suffisamment fin pour considérer l'écoulement localement pleinement développé (une condition aux limites périodique est utilisée pour les simulations dans Fluent).
- La pression de référence est de 17,78 kPa afin d'obtenir un nombre de Knudsen égal à 0,1.
- Le gradient de pression est de  $4 \times 10^7$  Pa/m.

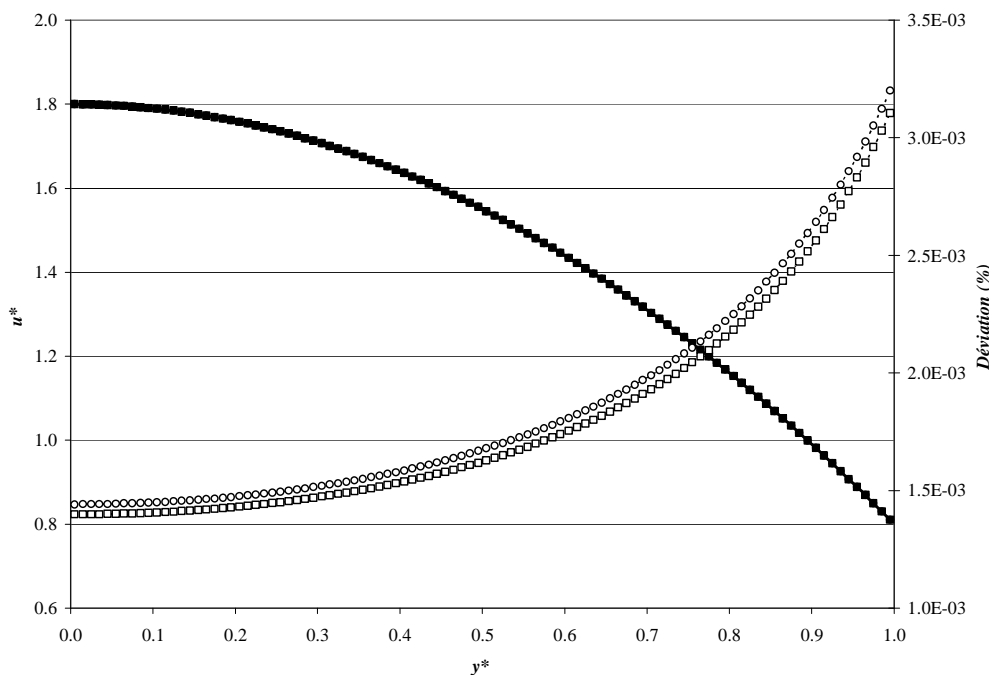
Pour une comparaison valable des deux méthodes, on choisit de définir le libre parcours moyen pour la méthode MW de la même manière qu'il est imposé dans Fluent pour la méthode LPBS. Basé sur une hypothèse de force intermoléculaire de Lennard-Jones, le libre parcours moyen peut s'écrire en fonction de la longueur caractéristique de Lennard-Jones du gaz selon l'équation (1.7). Toutes sortes d'expressions de  $\lambda$ , par exemple basées sur les modèles de type sphère rigide (HS), sphère rigide variable (VHS) ou sphère molle variable (VSS), peuvent être utilisées dans la méthode MW. En revanche, la méthode LPBS ne permettant d'utiliser que la condition aux limites d'ordre 1 de Maxwell et l'expression du libre parcours moyen donnée par l'équation (1.7), seule cette condition est utilisée ici pour la méthode MW, qui reste néanmoins valable avec des conditions aux limites d'ordre supérieur. Par ailleurs, le coefficient

$$C_{1\lambda} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \beta \lambda = C_1 \lambda \quad (2.80)$$

est limité par la méthode LPBS à la valeur de Maxwell  $\beta = 1$ . La même valeur est donc utilisée pour la méthode MW.



La comparaison des résultats obtenus par les méthodes LPBS et MW avec la solution analytique est représentée sur la Figure 2.6 et la Figure 2.7, pour un nombre de Knudsen égal à 0,1. La récupération des données peut se faire de deux manières, en lisant au centre des cellules « *cell value* » ou sur les nœuds de celles-ci « *node value* ». Dans ce dernier cas, la valeur recueillie est la moyenne des données issues des cellules autour du nœud. Les résultats de l'exportation aux centres des cellules sont représentés sur la Figure 2.6 qui montre que la méthode MW est un peu plus précise que la méthode LPBS. Dans les deux cas, pour ce type d'écoulement, les deux méthodes s'avèrent très précises avec des écarts relatifs par rapport à la solution analytique compris grosso modo entre  $10^{-7}$  et  $10^{-5}$ . Pour les résultats exportés aux nœuds « *node value* », la précision est bien meilleure que lorsque les résultats sont exportés aux centres « *cell value* ». D'autre part, dans ce dernier cas, la précision de la méthode MW est environ cinq fois plus grande que celle de la méthode LPBS.

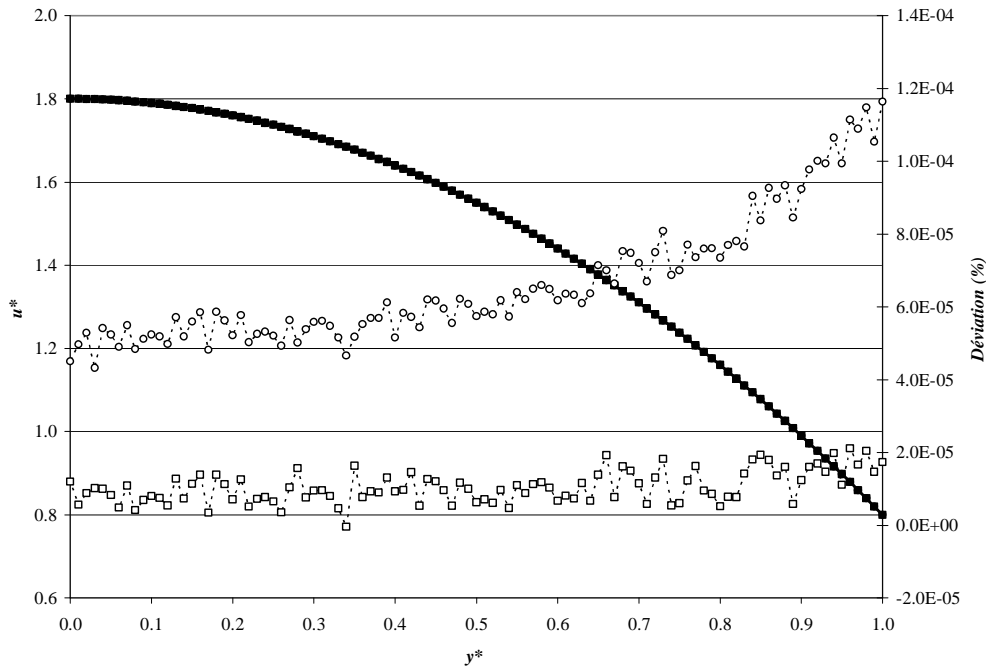


**Figure 2.6 :** Profils de vitesses adimensionnelles (*cell value*) pour un écoulement plan à  $Kn = 0.1$ .

Méthodes LPBS (●), MW (■) et solution analytique (-).

Écarts relatifs entre méthode LPBS et solution analytique (○)

Écarts relatifs entre méthode MW et solution analytique (□).



**Figure 2.7 :** Profils de vitesses adimensionnelles (*node value*) pour un écoulement plan à  $Kn = 0.1$ .

Méthodes LPBS (●), MW (■) et solution analytique (-).

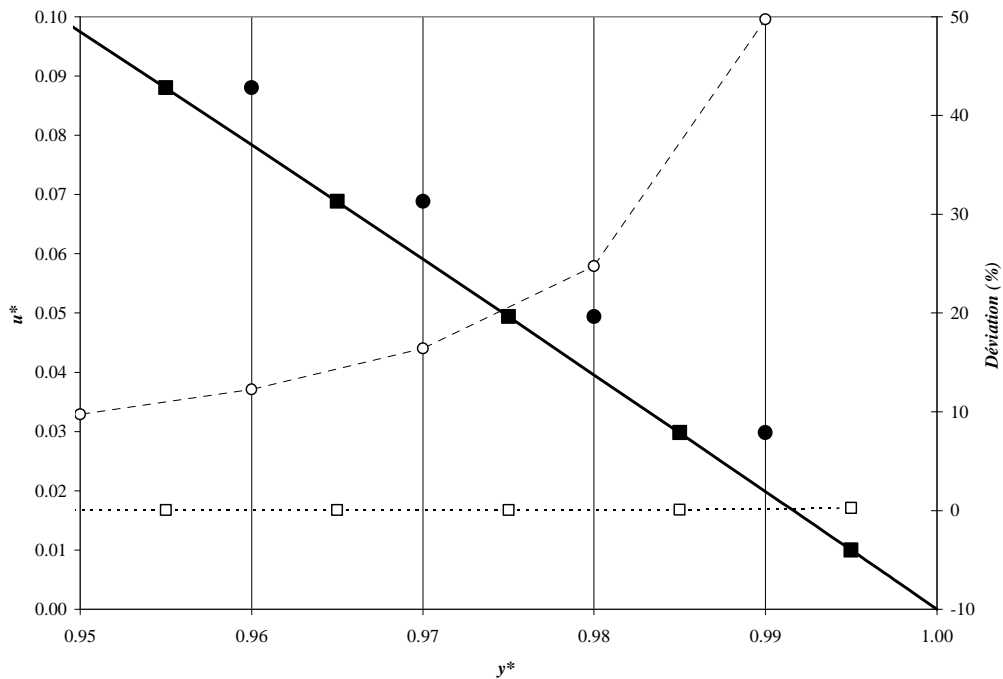
Ecarts relatifs entre méthode LPBS et solution analytique (○)

Ecarts relatifs entre méthode MW et solution analytique (□).

### Détermination du gradient de vitesse à la paroi

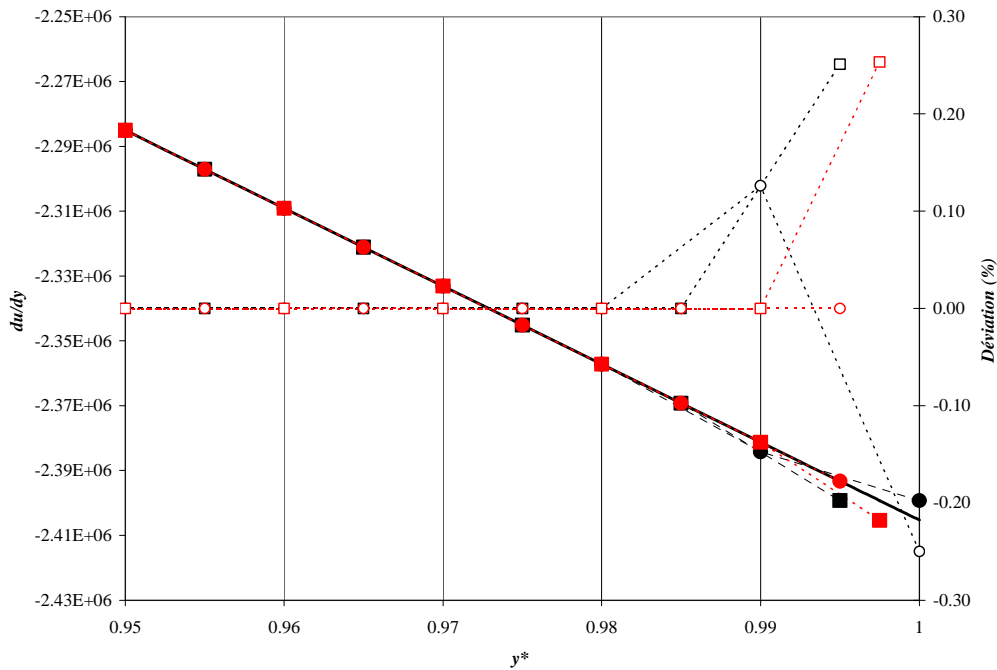
Dans la méthode MW, la vitesse de glissement est calculée à partir de la détermination du gradient de vitesse à la paroi fournie par le calcul précédent. Il y a plusieurs méthodes pour déterminer ce gradient. L'analyse en est présentée ci-dessous.

Plusieurs formats peuvent être exportés par Fluent, notamment le format ASCII. Dans ce cas, les résultats sont donnés pour chaque itération. Ils sont exportés au choix aux nœuds ou aux cellules. Notons qu'un décalage spatial des données peut se produire quand un domaine d'exportation, par exemple « *default-interior* », est sélectionné au moment de l'exportation. La Figure 2.8 montre ce décalage (●), qui introduit par la suite des erreurs. En revanche, sans sélectionner de domaine, les coordonnées sont préservées (■).



**Figure 2.8 :** Exportation des vitesses entre  $y^* = 0,95$  à  $y^* = 1$ (paroi). Le domaine « default-interior » a été sélectionné (●) ; aucun domaine sélectionné (■). Ecart à la solution analytique : (○) et (□).

Le gradient de vitesse peut être calculé directement dans Fluent, et les valeurs exportées aux centres des cellules (■) ou aux nœuds (●), comme représenté sur la Figure 2.9. C'est la méthode la plus simple pour extraire la valeur d'un gradient de vitesse. Cependant, elle s'avère imprécise pour les données proches de la paroi. Ces imprécisions ne peuvent pas être négligées car le gradient de vitesse joue un rôle important dans le calcul de la vitesse de glissement à la paroi.



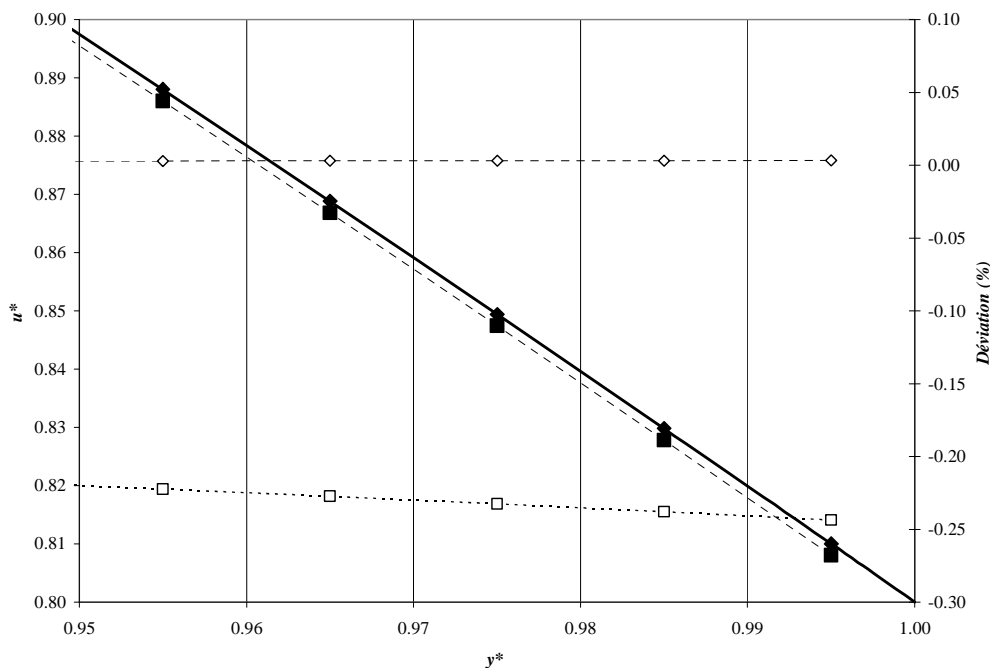
**Figure 2.9 :** Gradient de vitesse entre  $y^* = 0,95$  et  $y^* = 1$  (paroi). Données exportées aux nœuds (●), aux centres des cellules (■), calcul externe à Fluent à partir de la vitesse aux nœuds (●) et à partir de la vitesse aux centres des cellules (■). Comparaison avec la solution analytique (—) et écarts relatifs respectifs par rapport à la solution analytique : (○), (□), (○) (□).

Néanmoins, cette anomalie peut être résolue par un calcul externe du gradient à partir des vitesses aux nœuds (●). Ces valeurs de gradient de vitesse aux nœuds sont calculées à partir des vitesses au centre des cellules qui sont plus précises que les vitesses exportées aux nœuds. Les résultats issus de gradients de vitesse calculés à partir des données de vitesse exportées aux nœuds sont également présentés dans la Figure 2.9 (■). Ils présentent également une anomalie à proximité de la paroi. Les gradients de vitesse au centre des cellules ou aux nœuds peuvent être calculés par

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\text{cellule / noeud}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{n_{i+1} - n_i} \Big|_{\text{noeud / cellule}} \quad (2.81)$$

où  $u$  est la vitesse,  $n$  la normale à la paroi et  $i$  l'indice adjacent à la cellule ou au nœud considéré.

Fluent donne un résultat imprécis pour le calcul du gradient de vitesse à la paroi. La méthode la plus appropriée consiste à extrapoler les résultats à proximité de la paroi. Plusieurs méthodes sont possibles pour faire cette extrapolation. Dans le cas de l'écoulement entre plaques planes, le profil de gradient étant linéaire, toutes les méthodes donnent le même résultat.



**Figure 2.10 :** Vitesse adimensionnelle à proximité de la paroi, de  $y^* = 0.95$  à  $y^* = 1$  (paroi), pour un écoulement de gaz entre plaques planes avec  $Kn = 0.1$ .

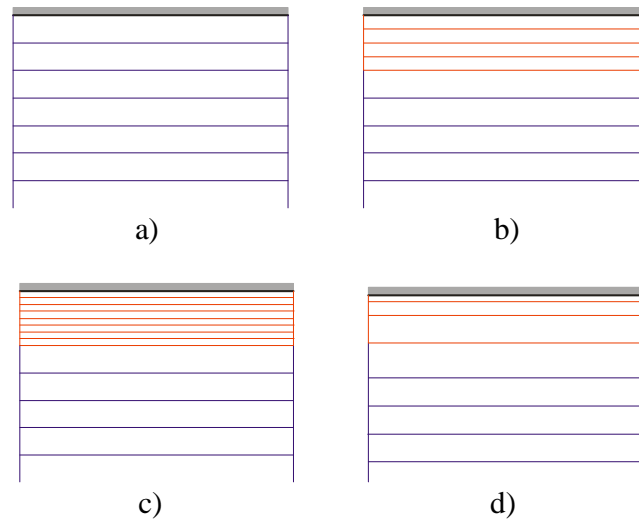
Solution analytique (—), simulation issue d'un glissement à la paroi obtenu à partir du gradient de vitesses de Fluent (■) et du gradient extrapolé (◆) et écarts relatifs respectifs avec la solution analytique : (□) et (◇).

La Figure 2.10 représente le profil de vitesse pour  $Kn = 0,1$ , le glissement à la paroi étant calculé numériquement à partir du gradient de vitesse fourni par Fluent ou à partir du gradient de vitesse extrapolé. Les deux profils sont comparés au profil de vitesses analytique. La figure montre que le profil de vitesses obtenu par extrapolation du gradient à la paroi est beaucoup plus précis que celui obtenu sans extrapolation.

*Influence du maillage*

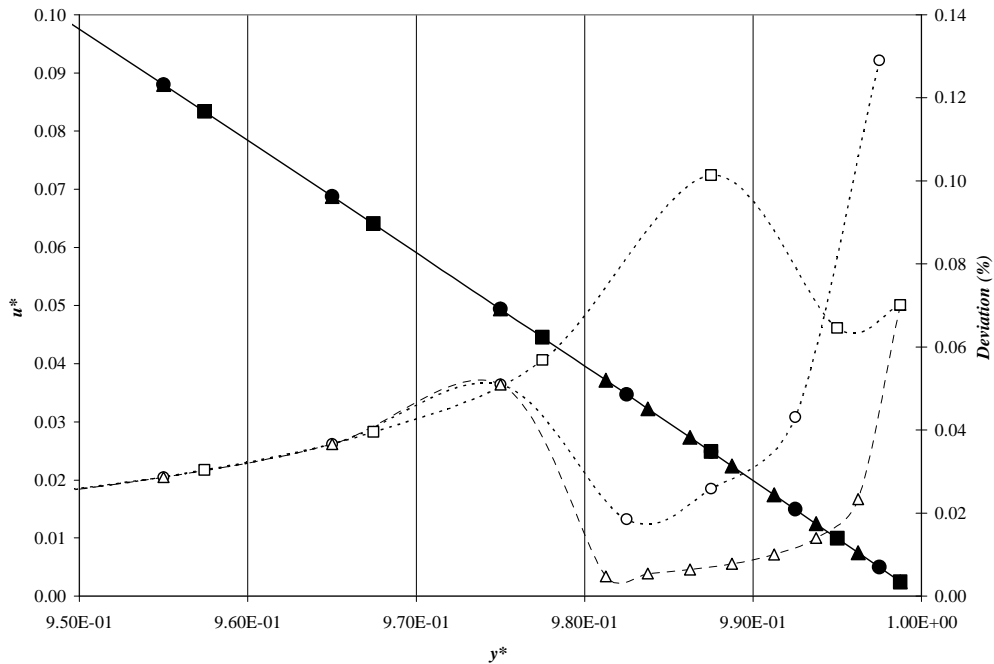
La précision des résultats dépend également du type de maillage et de sa finesse. Nous analysons l'influence du maillage pour un calcul sans extrapolation du gradient de vitesse à la paroi.

Trois types de maillage de type couche limite ont été testés à proximité de la paroi. La Figure 2.11 représente la structure de ces maillages. Deux de ces maillages sont uniformes avec une densité plus ou moins élevée, le troisième étant progressif.



**Figure 2.11 :** a) maillage normal    b) raffinement uniforme n°1  
c) raffinement uniforme n°2    d) raffinement progressif n°3

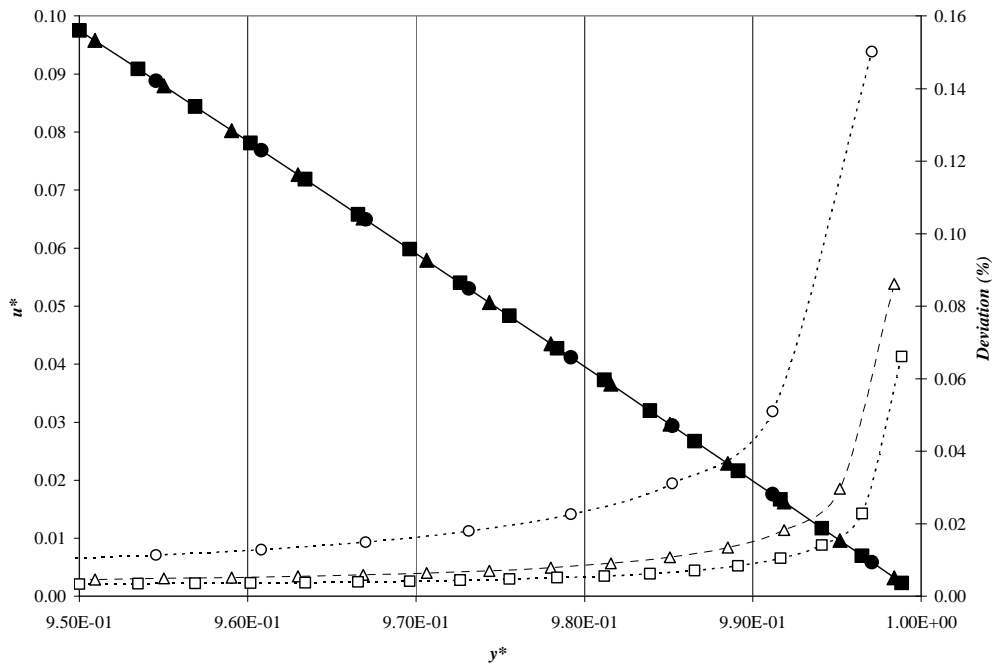
La Figure 2.12 représente le profil de vitesses après exportation des données aux centres des cellules, pour un écoulement non glissant. La zone raffinée est définie par  $0,98 \leq y^* \leq 1$ . La figure montre qu'il y a une réduction significative des écarts à la solution analytique dans la zone raffinée, qui était de l'ordre de 0,25 % sans raffinement (voir Figure 2.10). On note cependant une forte variation de l'écart lorsque la largeur de la cellule varie brutalement. Cette variation peut alors influencer le calcul du gradient et augmenter les erreurs lors du calcul de la vitesse de glissement.



**Figure 2.12 :** Vitesse adimensionnelle à proximité de la paroi, de  $y^* = 0.95$  à  $y^* = 1$  (paroi), pour un écoulement de gaz entre plaques planes sans glissement.

Maillages à proximité de la paroi n° 1 (●), n° 2 (▲) et n° 3 (■)  
 et écart relatif avec la solution analytique pour les cas n° 1 (○), n° 2 (△) et n° 3 (□).

Pour éviter cet écueil, des maillages progressifs sur toute la section sont maintenant étudiés. La largeur des mailles suit une progression géométrique et trois raisons sont considérées : 1,01 (cas n°4), 1,02 (cas n°5) et 1,025 (cas n°6). Dans chaque cas, le nombre de cellules total est identique. La Figure 2.13 représente les profils de vitesses obtenus par exportation des données aux centres des cellules. Elle montre une évolution régulière de l'écart à la solution analytique, contrairement à ce qui était observé sur la Figure 2.12. Cet écart diminue quand la raison augmente, essentiellement car les cellules à proximité de la paroi sont plus fines, là où les gradients de vitesse sont les plus forts.



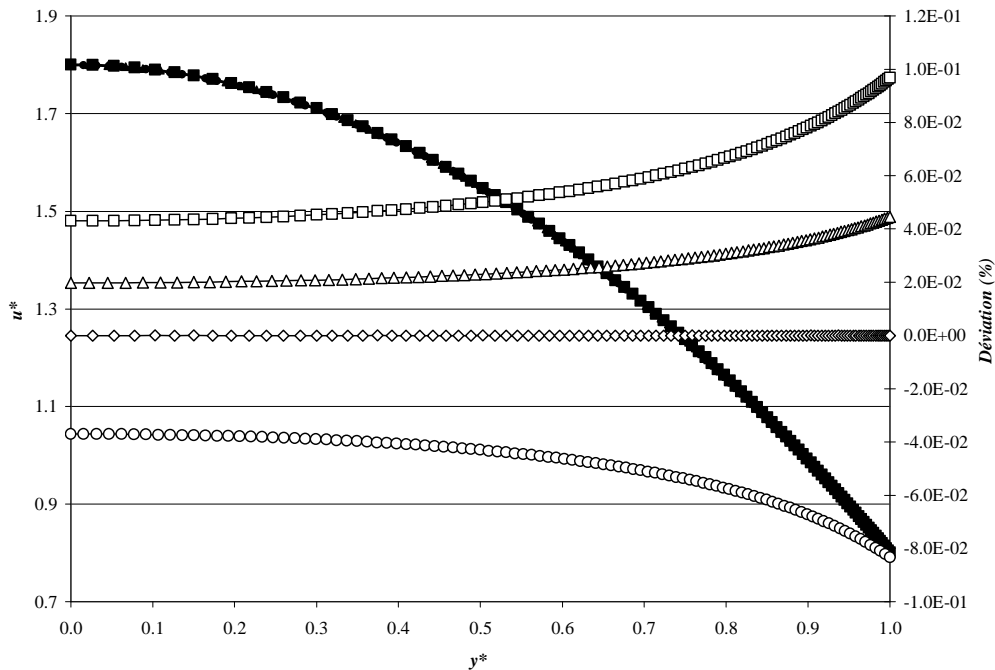
**Figure 2.13 :** Vitesse adimensionnelle à proximité de la paroi, de  $y^* = 0.95$  à  $y^* = 1$  (paroi), pour un écoulement de gaz entre plaques planes sans glissement.

Maillages progressifs n° 4 (●), n° 5 (▲) et n° 6 (■)

et écart relatif avec la solution analytique pour les cas n° 4 (○), n° 5 (Δ) et n° 6 (□).

La Figure 2.14 présente les profils de vitesse d'écoulement glissant pour les maillages progressifs n°4 (●), n°5 (▲) et n°6 (■) où la vitesse de glissement à la paroi est calculée par Fluent et n°6 (◆) où la vitesse de glissement à la paroi est calculée manuellement. La figure montre que lorsque la vitesse de glissement est calculée par Fluent, les résultats du maillage n°6 (■) sont moins précis que ceux du maillage n°5 (▲). Il est possible qu'un maillage trop fin à proximité de la paroi puisse amplifier l'anomalie trouvée sur la Figure 2.9. Cette anomalie peut être éliminée par le calcul manuel du gradient de vitesse qui est a été présenté dans le paragraphe précédent. Les écarts à la solution analytique tombent alors à  $10^{-6} - 10^{-8}$  au lieu de  $10^{-2}$ .





**Figure 2.14 :** Profil des vitesses entre  $y^* = 0$  et  $y^* = 1$  (paroi), pour un écoulement de gaz entre plaques planes avec  $Kn = 0.1$ .

Maillages progressifs n° 4 (●), n° 5 (▲), n° 6 (■) et n° 6 avec un calcul externe du gradient de vitesses et extrapolation à la paroi (◆). Ecart relatif respectifs par rapport à la solution analytique : (○), (Δ), (□), (◇).

### 2.3.3.2. Écoulement glissant dans un microcanal de section triangulaire équilatérale

Les sections triangulaires ou trapézoïdales sont fréquemment rencontrées dans les microsystèmes gravés sur silicium. Les deux techniques de simulation (MW et LPBS) précédemment proposées sont utilisées pour analyser l'écoulement glissant dans ce type de canalisation.

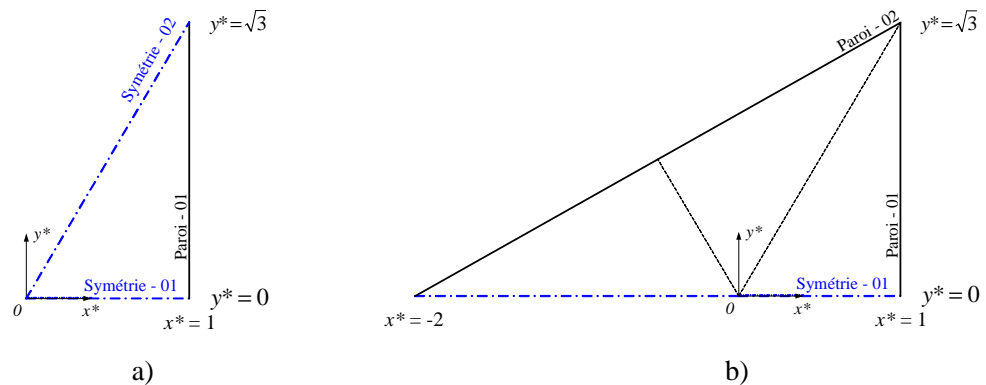
Dans cette partie, nous nous intéressons pour commencer à une section de type triangulaire équilatérale. En fait, on ne rencontre pas ce type de section dans un microsystème mais on dispose d'une solution analytique (voir paragraphe 2.2.3) qui permet de discuter valablement de la précision des modèles numériques. Dans le

paragraphe 2.3.3.3, on traite ensuite de sections réalistes, de forme trapézoïdale ou triangulaire isocèle.

Pour la section triangulaire équilatérale, deux types de domaines sont simulés selon les symétries considérées :

- le premier, noté S/6, qui représente un sixième de la section réelle, exploite toutes les symétries de la section (voir Figure 2.15),
- le deuxième, noté S/2, représente une demi section (voir Figure 2.15).

Les maillages sont créés avec une densité de cellules raisonnable : 8319 et 20038 cellules quadrilatérales pour les maillages S/6 et S/2 respectivement. Les maillages sont raffinés à proximité de la paroi pour améliorer le calcul des gradients de vitesse.



**Figure 2.15:** Section triangulaire équilatérale

a) simulation d'un sixième de section (S/6)    b) simulation d'une demi-section (S/2).

Les simulations sont réalisées avec de l'azote. Une condition périodique sur les frontières amont et aval est utilisée pour modéliser un écoulement isotherme localement pleinement développé. L'effet du nombre de cellules dans la direction  $z$  de l'écoulement est testé ; on ne constate pas d'effet particulier sur les résultats. Un modèle d'écoulement laminaire est choisi avec un calcul en double précision et au deuxième ordre de discrétisation pour une meilleure précision.

L'accommodation est supposée totale (*i.e.*  $\alpha = 1$ ) pour les deux modèles LPBS et MW. L'influence du nombre de Knudsen est d'abord analysée. Fluide travaillant sous forme dimensionnelle, on fait varier  $Kn$  en modifiant la pression de référence appliquée au domaine de calcul. Dans un premier temps, on effectue les simulations sur la section

S/6. Les débits massiques adimensionnels sont présentés dans le Tableau 2.2. Les écarts à la solution analytique sont donnés dans le Tableau 2.3.

$Kn$	$\dot{m}^*$					
	Solution Analytique	Fluent Sans glissement	Fluent MW 1 <sup>er</sup> itération	Fluent MW 2 <sup>ème</sup> itération	Fluent MW 3 <sup>ème</sup> itération	Fluent LPBS
0	1,000	0,999				
0,0125	1,100		1,099	1,099	1,099	1,100
0,0500	1,394		1,399	1,392	1,393	1,405
0,0750	1,587		1,599	1,583	1,586	1,611

**Tableau 2.2 :** Section triangulaire équilatérale – comparaison des débits massiques adimensionnels entre la solution analytique et les simulations numériques (S/6) pour différents nombres de Knudsen.

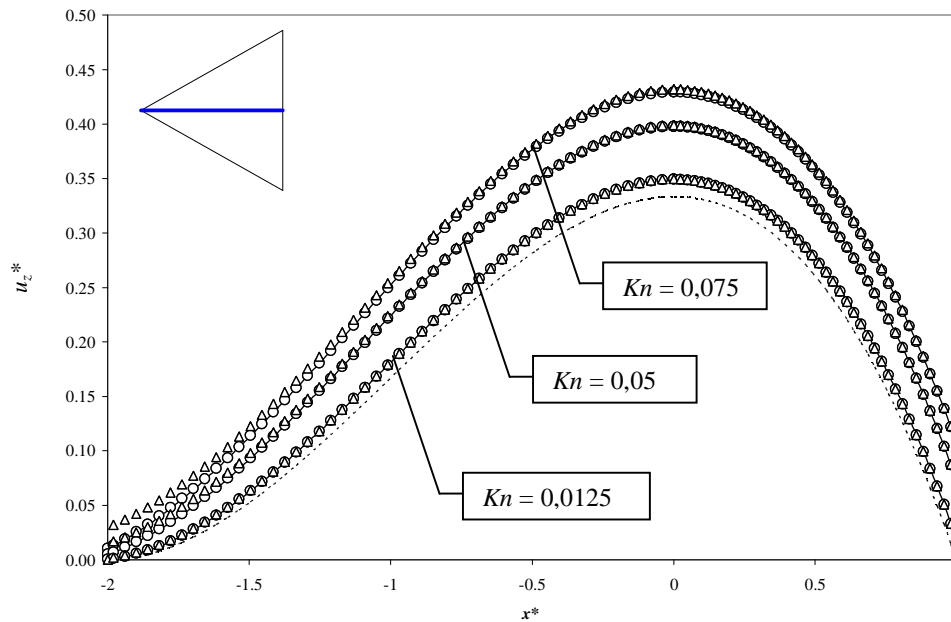
$Kn$	écart relatif entre débits analytique et simulés (%)				
	Fluent Sans glissement	Fluent MW 1 <sup>er</sup> itération	Fluent MW 2 <sup>ème</sup> itération	Fluent MW 3 <sup>ème</sup> itération	Fluent LPBS
0	-0,059				
0,0125		-0,029	-0,068	-0,067	0,018
0,0500		0,354	-0,132	-0,085	0,806
0,0750		0,735	-0,226	-0,086	1,537

**Tableau 2.3 :** Section triangulaire équilatérale – débits massiques adimensionnels – écart relatif entre la solution analytique et les simulations numériques (S/6) pour différents nombres de Knudsen.

Pour l'écoulement sans glissement, on trouve un écart relatif à la solution analytique égal à 0,059 % seulement (voir Tableau 2.3), quelle que soit la pression de référence. Pour les simulations d'écoulement glissant, le Tableau 2.3 montre que les erreurs introduites par la méthode MW sont très faibles (de l'ordre de 0,08%, le signe moins traduisant une sous-estimation du débit) quelle que soit la valeur du nombre de Knudsen. Par contre, la méthode LPBS n'est précise que pour des nombres de Knudsen très bas, mais la précision diminue considérablement lorsque  $Kn$  augmente.

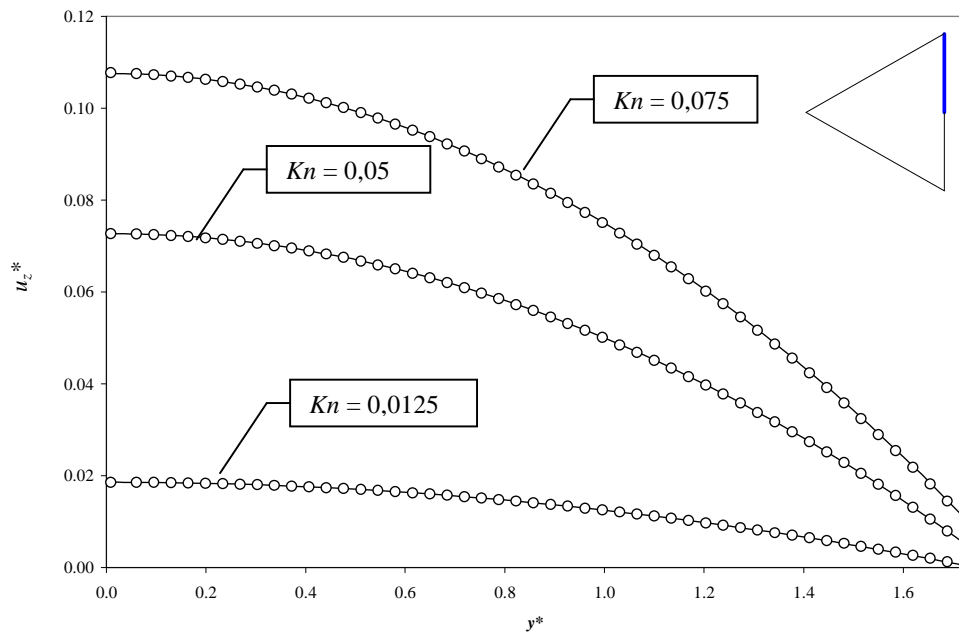
Les figures suivantes (Figure 2.16, Figure 2.17, Figure 2.18 et Figure 2.19) permettent d'expliquer ce phénomène. Les profils de vitesse obtenus par les deux méthodes dans le plan de symétrie sont comparés aux résultats analytiques dans la Figure 2.16. Un excellent accord est trouvé entre résultats analytiques et numériques quel que soit le modèle pour  $Kn = 0,0125$ . Pour  $Kn = 0,05$  et  $Kn = 0,075$ , l'accord est encore

excellent pour la méthode MW mais les écarts deviennent importants pour la méthode LPBS à proximité de la paroi ( $x^* = -2$ ).



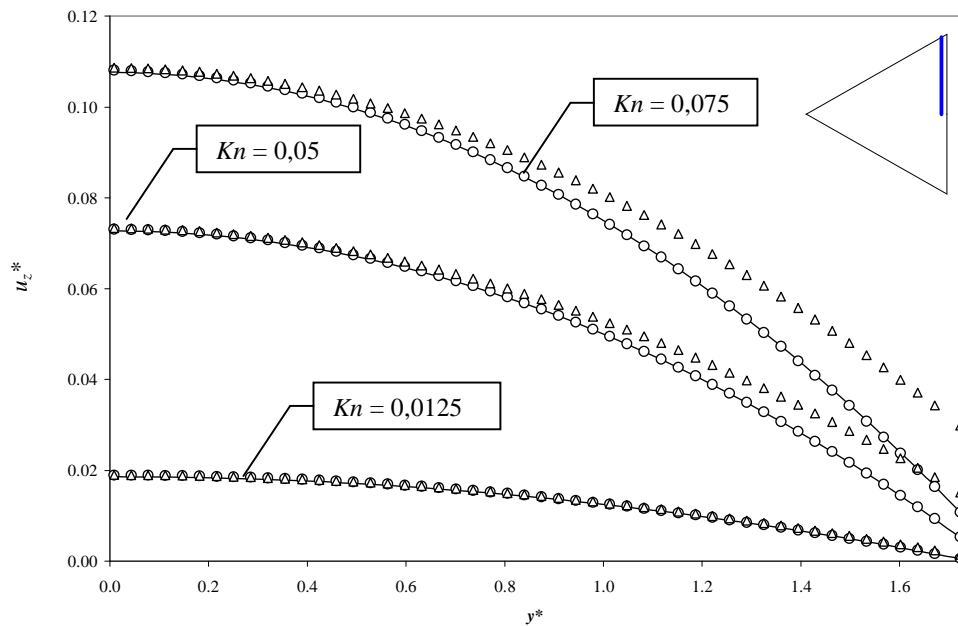
**Figure 2.16 :** Section triangulaire équilatérale – vitesse adimensionnelle ( $u_z^*$ ) sur l'axe de symétrie ( $y^* = 0$ ) ; comparaison entre écoulement non glissant (--), solution analytique de l'écoulement glissant (—), solutions numériques MW (O) et LPBS ( $\Delta$ ) des simulations S/6 pour différents  $Kn$ .

Le même excellent accord est observé entre les résultats obtenus par la méthode MW et la solution analytique dans la Figure 2.17 qui présente les profils de vitesse le long de la paroi  $x^* = 1$ .



**Figure 2.17 :** Section triangulaire équilatérale – vitesse adimensionnelle ( $u_z^*$ ) à la paroi ( $x^* = 1$ ) ; comparaison entre solution analytique (—) et solution numérique MW (O) des simulations S/6 pour différents  $Kn$ .

Les vitesses calculées aux centres des cellules à proximité immédiate de la paroi sont tracées dans la Figure 2.18. Dans ce cas, la méthode LPBS conduit à un écart supérieur à 100 % près du coin de la paroi pour les valeurs élevées de  $Kn$ , ce qui peut expliquer l'imprécision du calcul de débit massique présenté dans le Tableau 2.3.



**Figure 2.18** : Section triangulaire équilatérale – vitesse adimensionnelle ( $u_z^*$ ) au centre des cellules à proximité de la paroi ( $x^* \approx 1$ ) ; comparaison entre solution analytique de l'écoulement glissant (—), solutions numériques MW (O) et LPBS ( $\Delta$ ) des simulations S/6 pour différents  $Kn$ .

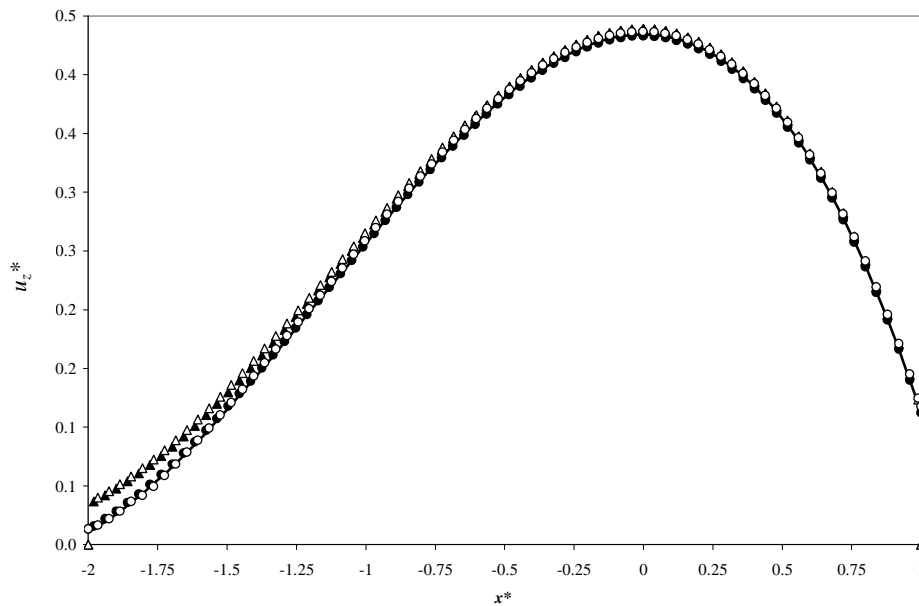
La simulation d'un sixième (S/6) de la section peut être faite seulement pour une section triangulaire équilatérale. Pour les formes plus complexes, triangulaires isocèles ou trapézoïdales, seul un plan de symétrie existe. Ainsi, les méthodes MW et LPBS ont besoin d'être au préalable validées sur une demi-section triangulaire équilatérale. Pour  $Kn = 0,075$ , les valeurs du débit massique adimensionnel  $\dot{m}^*$  simulé par les deux méthodes et les écarts à la solution analytique  $\dot{m}^*_{ana}$  sont présentés dans le Tableau 2.4 pour S/2 et S/6.

## Régime d'écoulement glissant

Condition aux limites	Partie de la section simulée	Kn	$\dot{m}^*$ et écart ( $\frac{\dot{m}^* - \dot{m}_{ana}^*}{\dot{m}_{ana}^*} \times 100 \%$ )			
			Solution Analytique	Fluent 1 <sup>ère</sup> itération	Fluent 2 <sup>ème</sup> itération	Fluent 3 <sup>ème</sup> itération
Non glissant	S/6	0,000	1,000	1,000 (-0,047 %)		
	S/2			1,000 (-0,028 %)		
MW	S/6	0,075	1,587	1,599 (0,735 %)	1,584 (-0,226 %)	1,586 (-0,086 %)
	S/2			1,599 (0,755 %)	1,584 (-0,195 %)	1,585 (-0,160 %)
LPBS	S/6			1,612 (1,537 %)		
	S/2			1,604 (1,035 %)		

**Tableau 2.4:** Section triangulaire équilatérale – calculs analytiques et numériques (simulation sur les domaines S/6 et S/2) du débit massique.

La méthode MW est un peu moins précise pour S/2 que pour S/6 mais l'écart à la solution analytique reste toujours inférieur à 0,2% après la 3<sup>ème</sup> itération. La petite différence entre S/2 et S/6 peut être expliquée par une densité de maillage un peu différente dans les deux cas. La précision de la méthode LPBS est un peu améliorée avec la simulation S/2 mais elle reste moins bonne que celle de la méthode MW (plus de 1% d'écart par rapport à la solution analytique). La meilleure précision de la méthode MW est essentiellement due à sa capacité à calculer proprement la vitesse de glissement dans les angles aigus, là où la méthode LPBS échoue. Ceci est illustré par la Figure 2.19 qui présente les profils de vitesse sur l'axe de symétrie  $y^* = 0$ . Les différences entre les données issues des simulations S/2 et S/6 pour chaque méthode sont très faibles, mais la méthode LPBS surestime largement la vitesse près du coin à  $x^* = -2$ .



**Figure 2.19** : Section triangulaire équilatérale – vitesse adimensionnelle ( $u_z^*$ ) sur l'axe de symétrie ( $y^* = 0$ ) ; comparaison entre les résultats analytiques (—) et les simulations S/6 MW ( $\circ$ ), S/6 LPBS ( $\Delta$ ), S/2 MW ( $\bullet$ ), S/2 LPBS( $\blacktriangle$ ) pour  $Kn = 0,075$ .

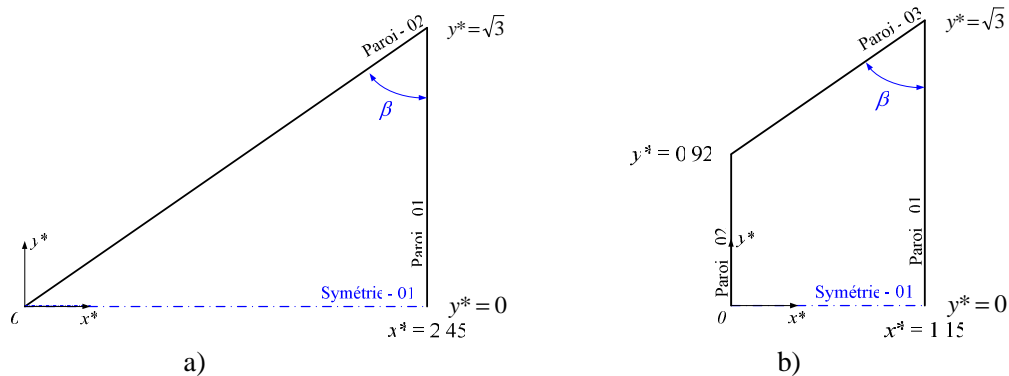
Pour conclure, la méthode LPBS proposée dans Fluent peut être utilisée avec une bonne précision uniquement pour un écoulement à bas  $Kn$ . Pour des nombres de Knudsen supérieurs à 0,025, cette méthode surestime l'écoulement glissant à la paroi à proximité du coin, ce qui conduit à une surestimation du débit.

La méthode MW proposée dans ce travail s'avère très précise quel que soit le nombre de Knudsen dans la plage  $[10^{-3}; 10^{-1}]$ . Des résultats similaires sont obtenus avec les deux domaines de simulation S/2 et S/6. Pour une section triangulaire équilatérale, les écarts à la solution analytique sont toujours inférieurs à 0,2%. Cette méthode est précise même dans les angles aigus de la section. Par conséquent, elle peut être utilisée avec une excellente précision pour les simulations d'écoulement glissant d'ordre 1 dans des microcanaux de section complexe. De plus, elle permet d'implémenter n'importe quelle définition de condition aux limites et de libre parcours moyen, ce qui n'est pas possible avec la méthode LPBS.



2.3.3.3. *Écoulement glissant dans les microcanaux de section triangulaire isocèle ou trapézoïdale*

On considère maintenant l'écoulement glissant à travers des microcanaux réels de sections triangulaires isocèles et trapézoïdales. Ces canaux peuvent en effet être fabriqués par gravure anisotrope dans une plaque de silicium. Les géométries correspondantes sont représentées sur la Figure 2.20. Les dimensions sont normalisées par la longueur de référence  $L$  comme pour la section triangulaire équilatérale de hauteur  $3L$ , de sorte que la valeur maximale de  $y^*$  soit  $\sqrt{3}$ . Selon la durée de la gravure, la profondeur peut être limitée dans la direction  $x$ , ce qui mène à une section trapézoïdale. Pour une gravure plus longue, la section devient un triangle isocèle. Pour une plaque de silicium avec une orientation de surface  $\langle 100 \rangle$ , l'angle  $\beta = 54,74^\circ$ .



**Figure 2.20 :** (a) Section triangulaire isocèle avec  $D_H^* = 1.773$   
 (b) Section trapézoïdale avec  $D_H^* = 1.502$  et  $\beta = 54.74^\circ$ .

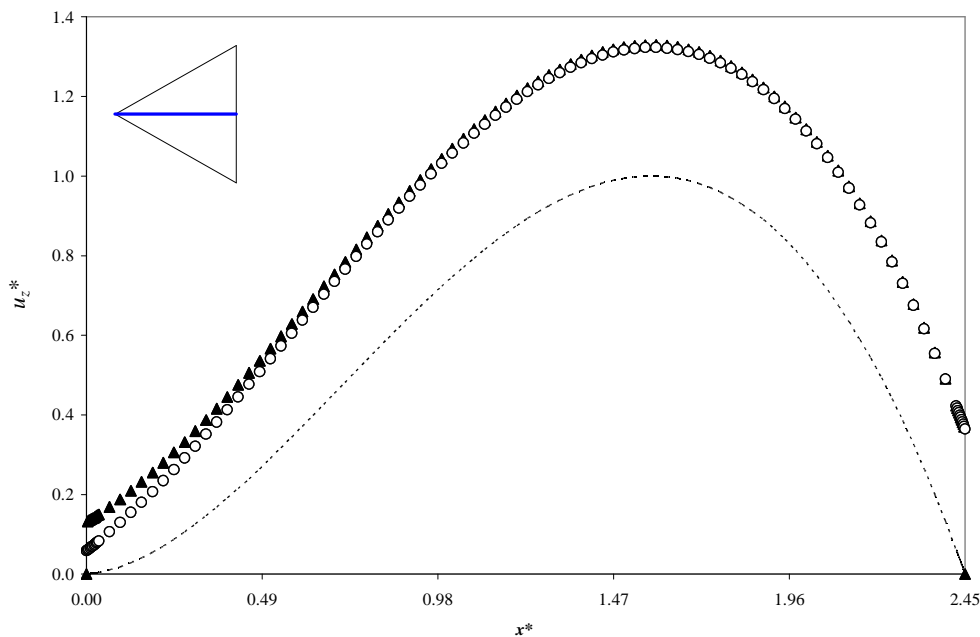
Le maillage généré par Gambit utilise des cellules quadrilatérales. Les conditions de simulation sont les mêmes que celles utilisées pour la section triangulaire équilatérale.

Le Tableau 2.5 montre les valeurs de débit massique à travers les microcanaux des sections triangulaire équilatérale, isocèle et trapézoïdale pour les deux méthodes MW et LPBS, à la même valeur de  $Kn'$ . Ici,  $Kn' = \lambda/(\sqrt{3}L) = 0,0866$  est basé sur la demi-largeur de la section dans les 3 cas, tandis que  $Kn$  est basé sur le diamètre hydraulique. Comme précédemment, on constate que la méthode LPBS donne un débit massique plus

important que la méthode MW, quel que soit le nombre de Knudsen. C'est à cause d'une surestimation de la vitesse dans les zones proches du coin. Ce problème est illustré par les figures suivantes (Figure 2.21, Figure 2.22 et Figure 2.24).

	$Kn$	$\dot{m}^*$			
		Fluent 1 <sup>ère</sup> itération	Fluent 2 <sup>ème</sup> itération	Fluent 3 <sup>ème</sup> itération	Fluent LPBS
Section triangulaire équilatérale	0,075	1,600	1,584	1,585	1,604
Section triangulaire isocèle	0,084	1,668	1,650	1,653	1,674
Section trapézoïdale	0,100	1,861	1,831	1,843	1,866

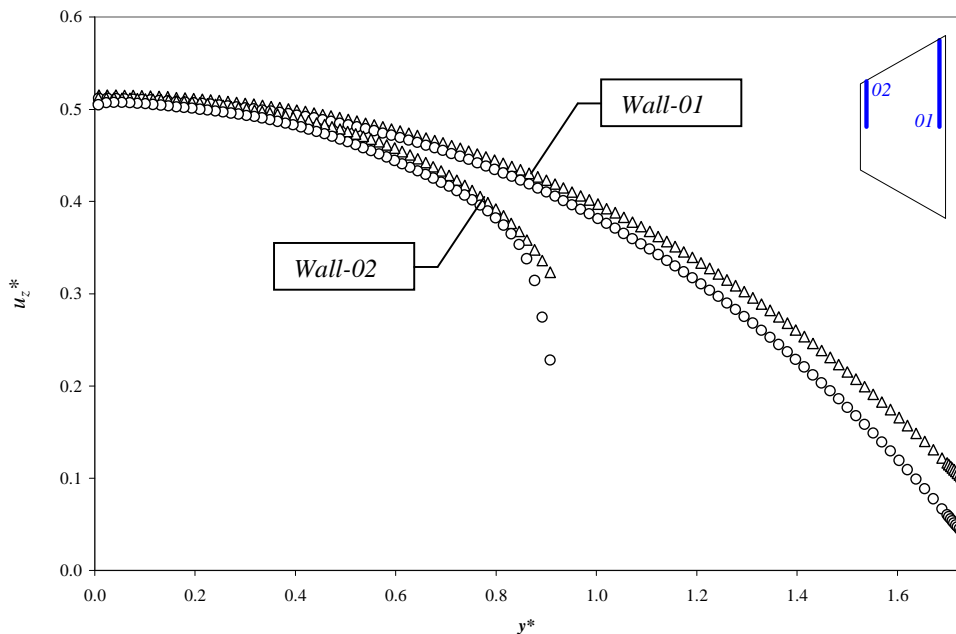
**Tableau 2.5 :** Comparaison du débit massique à travers les sections triangulaire équilatérale, triangulaire isocèle et trapézoïdale pour la même longueur de la paroi-01 ( $Kn' = \lambda / (\sqrt{3} L) = 0,0866$  dans les 3 cas).



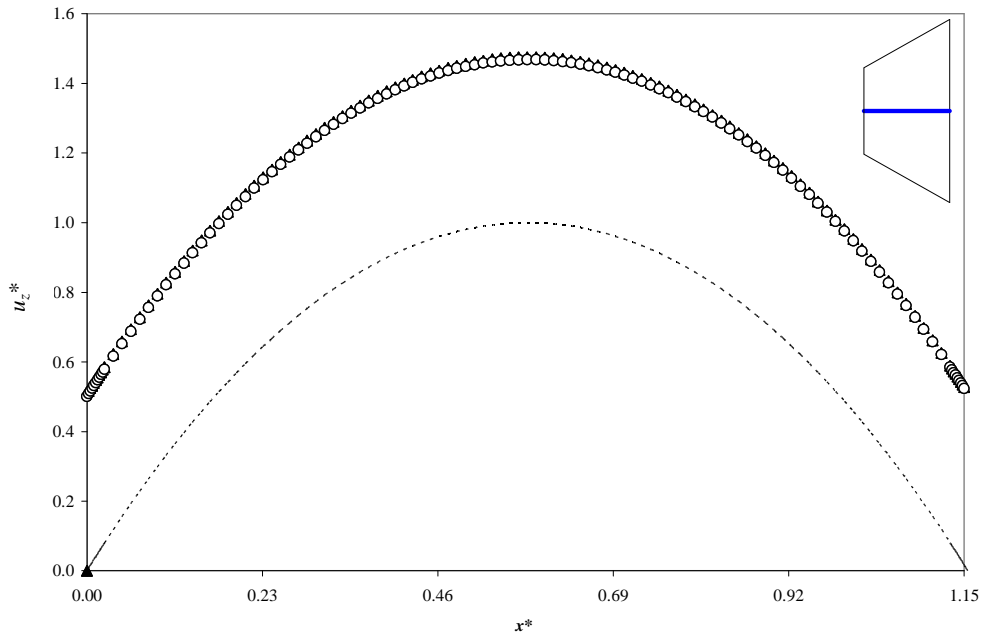
**Figure 2.21 :** Section triangulaire isocèle – vitesse adimensionnelle ( $u_z^*$ ) sur l'axe de symétrie ( $y^* = 0$ ) ; comparaison entre simulations sans glissement (---), MW (O) and LPBS ( $\Delta$ ) pour  $Kn' = 0,0866$ .

La Figure 2.21 représente les profils de vitesse obtenus par les deux méthodes sur l'axe de symétrie de la section triangulaire isocèle. Aucune différence n'est observée entre les deux profils à proximité de la base de la section triangulaire, où l'axe de symétrie est perpendiculaire à la Paroi-01, mais les écarts augmentent quand on approche

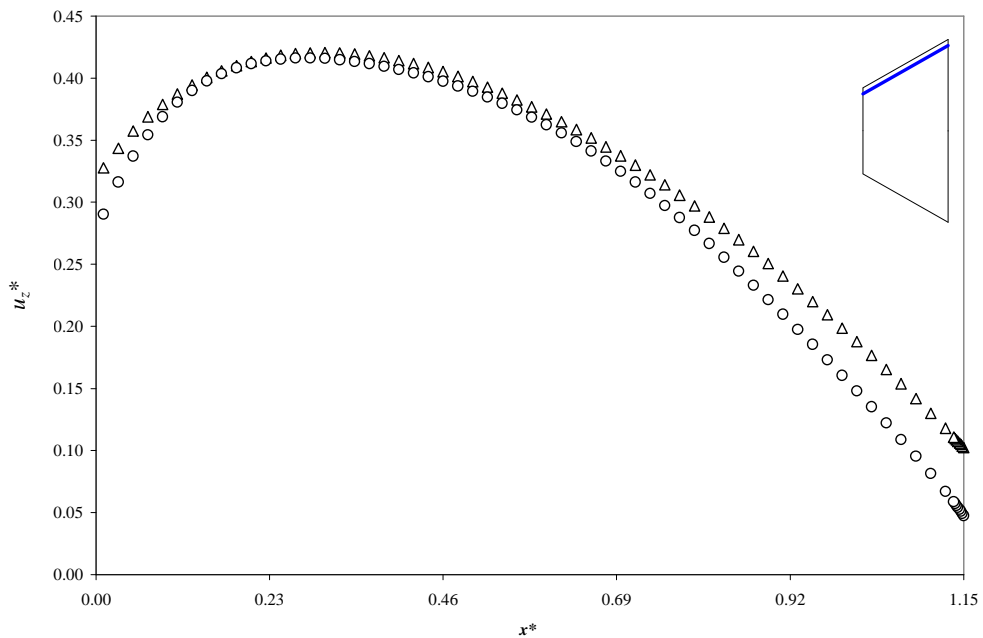
le coin de la paroi. Le même phénomène peut être observé sur la Figure 2.22 le long des parois 01 et 02 de la section trapézoïdale : pas d'écart significatif entre les deux méthodes près de l'axe de symétrie, mais il augmente quand on s'approche des coins et particulièrement pour l'angle aigu. De plus, la Figure 2.23 montre que pour la section trapézoïdale, les deux méthodes donnent le même profil de vitesse dans le plan de symétrie normal aux deux parois latérales. En revanche, les écarts sont très sensibles le long de la paroi qui relie les deux coins (voir Figure 2.24), avec un écart maximal au niveau de l'angle aigu (voir Figure 2.22).



**Figure 2.22 :** Section trapézoïdale – vitesse adimensionnelle ( $u_z^*$ ) au centre des cellules proches des parois ( $x^* = 0, x^* = 1.15$ ) ; comparaison entre les simulations MW (O) et LPBS ( $\Delta$ ) pour  $Kn' = 0,0866$ .



**Figure 2.23 :** Section trapézoïdale – vitesse adimensionnelle ( $u_z^*$ ) sur l'axe de symétrie ( $y^* = 0$ ) ;  
comparaison entre les simulations d'écoulement non glissant (--),  
de la méthode MW (O) et de la méthode LPBS ( $\Delta$ ) pour  $Kn' = 0,0866$



**Figure 2.24 :** Section Trapézoïdale – vitesse adimensionnelle ( $u_z^*$ ) au centre des cellules proches des  
parois, comparaison entre les simulations MW (O) et LPBS ( $\Delta$ ) pour  $Kn' = 0,0866$

Finalement, les valeurs du nombre de Poiseuille calculées par le produit du coefficient de frottement  $f$  et du nombre de Reynolds  $Re$  pour les deux méthodes sont comparées dans la Tableau 2.6 avec les solutions numériques de Morini *et al.* (2004). Tous les résultats sont en excellent accord mais ceux obtenus avec la méthode MW sont plus proches de ceux de Morini.

$\beta$	$\gamma$		$Kn = 0$	$Kn = 0.1$	
			$fRe$	$fRe - MW$	$fRe - LPBS$
0.200	0.156	Morini <i>et al.</i>	18,650	9,267	
		Nos résultats	18,635	9,266	9,204
		déviations (%)	-0,081	-0,015	-0.684

**Tableau 2.6** : Nombre de Poiseuille : comparaison avec les résultats de [67], pour  $\beta = 0,2$  et  $\gamma = 0,156$  ( $\beta =$  profondeur /  $2 \times$  largeur de la paroi 02.,  $\gamma =$  profondeur /  $2 \times$  largeur de la paroi 01).

## Conclusion

La première partie de ce chapitre présente une étude bibliographique des conditions aux limites de glissement à la paroi et des coefficients de glissement qui leur sont associés. L'utilisation de ce type de conditions aux limites avec les équations de Navier-Stokes permet de calculer les écoulements à travers les microsystèmes jusqu'au début du régime de transition. Les solutions analytiques et semi-analytiques relatives à un écoulement de Poiseuille isotherme entre deux plaques parallèles et dans un canal de section rectangulaire ou triangulaire équilatérale sont présentées dans la seconde partie du chapitre. Pour les sections plus complexes pour lesquelles une solution analytique n'existe pas, l'outil numérique s'avère nécessaire et il est introduit dans la troisième partie. La méthode LPBS du code Fluent et la méthode MW proposée dans ce travail sont confrontées pour les écoulements 2D et 3D. La flexibilité et la précision de la méthode MW sont démontrées. Les difficultés de simulation de la vitesse à proximité des angles aigus de la section sont résolues en utilisant la méthode MW. Cette méthode est validée par comparaison avec la solution analytique de l'écoulement glissant dans une section triangulaire équilatérale (moins de 0,2% d'écart) avant d'être utilisée pour des sections

plus complexes. La simulation d'écoulements glissants dans des sections triangulaires isocèles et trapézoïdales, fréquemment rencontrées dans les microcanaux usinés par gravure anisotrope sur substrat de silicium, est présentée à la fin du chapitre.

### Références Bibliographiques

- [1] [http://research.nianet.org/~luo/Reprints-luo/Notes/TUBraunschweig\\_03/TUB03-1.pdf](http://research.nianet.org/~luo/Reprints-luo/Notes/TUBraunschweig_03/TUB03-1.pdf) 2004.
- [2] Maxwell, J. C. (1867). "On the dynamical theory of gases." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 157, 49-88.
- [3] Maxwell, J. C. (1879). "On stress in rarefied gases from inequalities of temperature" *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 170, 231-256.
- [4] Cercignani, C. (2006). *Slow rarefied flows: Theory and application to Micro-Electro-Mechanical Systems*, Birkhäuser Verlag, Basel.
- [5] Dadzié, S. E. K. (2005). "Conditions aux limites dans un gaz raréfié: loi de réflexion à la paroi, saut de température, glissement de vitesse, couche de Knudsen," Thèse de Doctorat. Université de Provence, Aix-Marseille.
- [6] Boltzmann, L. (1964). *Lectures on gas theory*, Cambridge University Press, London.
- [7] Chapman, S., and Cowling, T. G. (1970). *The mathematical theory of non-uniform gases*, Cambridge University Press, London.
- [8] Ferziger, J. H., and Kaper, H. G. (1972). *Mathematical theory of transport processes in gases*, North-Holland, Amsterdam.
- [9] Hirschfelder, J. O., Curtiss, C. F., and Bird, R. B. (1954). *Molecular theory of gases and liquids*, Wiley, New York.
- [10] Cercignani, C. (1988). *The Boltzmann equation and its application*, Springer-Verlag, Berlin.
- [11] Sone, Y. (2007). *Molecular gas dynamics: Theory, techniques, and applications*, Birkhäuser, Boston.
- [12] Hilbert, D. (1916/17). "Begründung der kinetischen Gastheorie." *Mathematische Annalen*, 72, 562-577.
- [13] Colin, S. (2004). *Microfluidique*, Lavoisier, Paris.

- [14] Kandlikar, S., Garimella, S., Li, D., Colin, S., and King, M. (2005). *Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels*, Elsevier, Oxford.
- [15] Grad, H. (1949). "On the kinetic theory of rarefied gases." *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2(4), 331-407.
- [16] Struchtrup, H. (2005). *Macroscopic transport equations for rarefied gas flows*, Springer, Berlin.
- [17] Aubert, C. (1999). "Ecoulements compressibles de gaz dans les microcanaux : effets de raréfaction, effets instationnaires," Thèse de Doctorat. Université Paul Sabatier, Toulouse.
- [18] Kennard, E. H. (1938). *Kinetic theory of gases: with an introduction to statistical mechanics*, McGraw-Hill, New York.
- [19] Jang, J., and Wereley, S. T. (2006). "Effective heights and tangential momentum accommodation coefficients of gaseous slip flows in deep reactive ion etching rectangular microchannels." *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 16(3), 493-504.
- [20] Smoluchowski, M. V. (1898). "Ober Wärmeleitung in verdünnten Gasen." *Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie (Wied. Ann.)*, 64, 101.
- [21] Schamberg, R. (1947). "The fundamental differential equations and the boundary conditions for high speed slip-flow, and their application to several specific problems," Thèse de Doctorat. California Institute of Technology.
- [22] Kramers, H. A. (1949). "On the behaviour of a gas near a wall." *Il Nuovo Cimento*, 6(2), 297-304. [23]
- [24] Welander, P. (1954). "The temperature jump in a rarefied gas." *Arkiv foer Fysik*, 7, 507-53.
- [25] Wang-Chang, C. S., and Uhlenbeck, G. E. (1952). "Report of the Engineering Research Institute." University of Michigan.
- [26] Ziering, S. (1960). "Shear and heat flow for Maxwellian molecules." *Physics of Fluids*, 3(4), 503.
- [27] Willis, D. R. (1962). "Comparison of kinetic theory analyses of linearized couette flow " *Physics of Fluids*, 5(2), 127-135. [28]
- [29] Albertoni, S., Cercignani, C., and Gotusso, L. (1963). "Numerical evaluation of the slip coefficient." *Physics of Fluids*, 6(7), 993-996.

- [30] Deissler, R. G. (1964). "An analysis of second-order slip flow and temperature-jump boundary conditions for rarefied gases." *International Journal of Heat Mass Transfer*, 7(6), 681-694.
- [31] Srekanth, A. K. (1969). "Slip flow through long circular tubes." *the 6th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, Cambridge, MA, 667-680.
- [32] Hsia, Y. T., and Domoto, G. A. (1983). "An experimental investigation of molecular rarefaction effects in gas lubricated bearings at ultra low clearances." *Journal of Lubrication*, 105(1), 120-130.
- [33] Loyalka, S. K. (1990). "Slip and jump coefficients for rarefied gas flows: variational results for Lennard-Jones and  $n(r)$ -6 potentials " *Physica A*, 163(3), 813-821.
- [34] Mitsuya, Y. (1993). "Modified Reynolds equation for ultra-thin film gas lubrication using 1.5-order slip flow model and considering surface accommodation coefficient." *Journal of Tribology*, 115(2), 289-294.
- [35] Beskok, A., and Karniadakis, E. M. (1999). "A model for flows in channels, pipes, and ducts at micro and nano scales." *Microscale Thermophysical Engineering*, 3(1), 43-77.
- [36] Jie, D., Diao, X., Cheong, K. B., and Yong, L. K. (2000). "Navier-Stokes simulations of gas flow in micro devices." *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 10(3), 372-379.
- [37] Xue, H., and Fan, Q. (2000). "A new analytic solution of the Navier-Stokes equations for microchannel flows." *Microscale Thermophysical Engineering*, 4(2), 125-143.
- [38] Sharipov, F., and Kalempa, D. (2003). "Velocity slip and temperature jump coefficients for gaseous mixtures. I. Viscous slip coefficient." *Physics of Fluids*, 15(6), 1800-1806.
- [39] Hadjiconstantinou, N. G. (2003). "Comment on Cercignani's second-order slip coefficient." *Physics of Fluids*, 15(8), 2352-2354.
- [40] Zhong, X. "On numerical solutions of Burnett equations for hypersonic flow past 2-D circular blunt leading edges in continuum transition regime." *In AIAA 42. Fluid Dynamics Conference July 6-9, 1993, Orlando FL, AIAA 93-3092.*
- [41] Albertoni, S., Cercignani, C., and Gotusso, L. (1963). "Numerical evaluation of the slip coefficient." *Physics of Fluids*, 6(7), 993-996.



- [42] Gross, E. P., Jackson, E. A., and Ziering, S. (1957). "Boundary value problems in kinetic theory of gases." *Annals of Physics*, 1(2), 141-167.
- [43] Hadjiconstantinou, N. G. (2003). "Comment on Cercignani's second-order slip coefficient." *Physics of Fluids*, 15(8), 2352-2354.
- [44] Cercignani, C. (2000). *Rarefied gas dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [45] Sone, Y., and Onishi, Y. (1978). "Kinetic theory of evaporation and condensation - hydrodynamic equation and slip boundary condition." *Journal of the Physical Society of Japan*, 44(6), 1981-1994.
- [46] Ohwada, T., Sone, Y., and Aoki, K. (1989). "Numerical analysis of the shear and thermal creep flows of a rarefied gas over a plane wall on the basis of the linearized Boltzmann equation for hard-sphere molecules." *Physics of Fluids A*, 1(9), 1588-1599.
- [47] Ohwada, T., Sone, Y., and Aoki, K. (1989). "Numerical analysis of the Poiseuille and thermal transpiration flows between two parallel plates on the basis of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules." *Physics of Fluids A*, 1(12), 2042-2049.
- [48] Reynolds, M. A., Smolderen, J. J., and Wendt, J. F. "Velocity profile measurements in the Knudsen layer for the Kramer problem." in *Rarefied Gas Dynamics*, VON KARMAN INST FOR FLUID DYNAMICS RHODE-SAINT-GENESE (BELGIUM).
- [49] Loyalka, S. K. (1975). "Velocity profile in the Knudsen layer for the Kramer's problem." *Physics of Fluids*, 18(12), 1666-1669.
- [50] Bird, G. A. *Proceeding of the 10th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics*, 323.
- [51] Karniadakis, G., Beskok, A., and Aluru, N. (2005). *Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation*, Springer, New York.
- [52] Arkilic, E. (1997). "Measurement of mass flow and tangential momentum accommodation coefficient in silicon micro-machined channels," Thèse de Doctorat. Massachusetts Institute of Technology.
- [53] Ivchenko, I. N., Loyalka, S. K., and Tompson, R. V. (1997). "Slip coefficients for binary gas mixtures." *Journal of Vacuum Science and Technology A*, 15(4), 2375-2381.

- [54] Porodonov, B. T., Suetin, P. E., Borisov, S. F., and Akinshin, V. D. (1974). "Experimental investigation of rarefied gas flows in different channels." *Journal of Fluid Mechanics*, 64(3), 417-437.
- [55] Aubert, C., and Colin, S. (2001). "High-order boundary conditions for gaseous flows in rectangular microchannels " *Microscale Thermophysical Engineering*, 5(1), 41-54.
- [56] Lalonde, P. (2001). "Etude expérimentale d'écoulements gazeux dans les microsystèmes à fluides," Thèse de Doctorat. Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse.
- [57] Colin, S., Lalonde, P., and Caen, R. (2004). "Validation of a second-order slip flow model in rectangular microchannels." *Heat Transfer Engineering*, 25(3), 23-30.
- [58] Ewart, T., Perrier, P., Graur, I., and Méolans, J. G. (2006). "Mass flow rate measurements in gas micro flows." *Experiments in Fluids*, 41(3), 487-498.
- [59] Ewart, T., Perrier, P., Graur, I., and Méolans, J. G. (2007). "Tangential momentum accommodation in microtube." *Microfluidics and Nanofluidics*, 3(6), 689-695.
- [60] Ewart, T., Perrier, P., Graur, I. A., and Méolans, J. G. (2007). "Mass flow rate measurements in a microchannel, from hydrodynamic to near free molecular regimes." *Journal of Fluid Mechanics*, 584, 337-356.
- [61] Ewart, T. (2007). "Etude des écoulements gazeux isothermes en microconduit : du régime hydrodynamique au proche régime moléculaire libre," Thèse de Doctorat. Ecole polytechnique Universitaire de Marseille, Université de Provence, Marseille.
- [62] Weng, H. C., and Chen, C. o.-K. (2008). "A challenge in Navier-Stokes-based continuum modeling: Maxwell-Burnett slip law." *Physics of Fluids*, 20(10), 106101.
- [63] Lockerby, D. A., Reese, J. M., Emerson, D. R., and Barber, R. W. (2004). "Velocity boundary at solid walls in rarefied gas calculations." *Physical Review E*, 70(1), 017303-017303-4.
- [64] Maurer, J., Tabeling, P., Joseph, P., and Willaime, H. (2003). "Second-order slip laws in microchannels for helium and nitrogen." *Physics of Fluids*, 15(9), 2613-2621.
- [65] Cercignani, C., and Lorenzani, S. (2008). "A variational solution of the linearized Boltzmann equation for gas flows in microchannels." *1st European Conference on Microfluidics*, Bologna.

- [66] Wang, C. Y. (2003). "Slip flow in a triangular duct - an exact solution." *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 83(9), 629-631.
- [67] Morini, G. L., Spiga, M., and Tartarini, P. (2004). "The rarefaction effect on the friction factor gas flow in microchannels", *Superlattices and Microstructures*, 35(3-6), 587-599.



## Chapitre 3

# Régime de transition

La modélisation des écoulements gazeux dans le régime de transition est plus complexe que celle du régime hydrodynamique et du régime d'écoulement glissant présentés dans le chapitre précédent, car l'approche continue n'est plus valable. Elle nécessite alors d'utiliser la théorie cinétique des gaz capable de couvrir tous les régimes, de l'hydrodynamique au moléculaire libre. Dans ce chapitre, nous présentons les modèles que nous avons utilisés pour la modélisation des écoulements fortement raréfiés dans les microcanaux, tout d'abord pour des gaz simples, puis des mélanges gazeux binaires. La mise en œuvre de ces modèles nécessite des techniques numériques spécifiques qui ont été développées dans l'équipe du professeur Valougeorgis à l'Université de Thessaly, en Grèce. A la suite d'une rapide introduction de la théorie cinétique appliquée au régime de transition, nous ne présentons ici qu'un bref résumé des modèles et des procédures utilisés.

### 3.1. Introduction

#### 3.1.1. Ecoulements de gaz dans le régime de transition

Suite à son établissement, les techniques de résolution de l'équation de Boltzmann se sont développées du fait d'un intérêt croissant pour des applications de plus en plus nombreuses. Au 19<sup>ème</sup> siècle, Boltzmann s'est intéressé à l'entropie par une approche microscopique statistique et il a mis en évidence un accroissement d'entropie dans un système isolé, en considérant la fonction  $H$  qui est un des moments de la fonction de distribution. Dans le même temps, on commence à établir les liens entre l'approche

cinétique par l'équation de Boltzmann et l'approche continue, sous certaines hypothèses simplificatrices. Pour résoudre l'équation de Boltzmann, la principale difficulté consiste à calculer le terme de collision. Le développement des outils numériques et la forte demande dans les domaines de l'aérospatial et du vide, vont donner toute son importance à la théorie cinétique dans les années 50-60. Malgré les progrès récents de l'informatique, on ne peut encore à l'heure actuelle résoudre directement l'équation de Boltzmann dans des cas non triviaux et les modèles cinétiques sont particulièrement utiles. Nous proposons ci-dessous quelques repères bibliographiques sur ces modèles cinétiques.

### 3.1.2. Modèles d'équations cinétiques

La révolution de la théorie cinétique des gaz a commencé quand Boltzmann a introduit son équation (2.1) pour décrire la dynamique des gaz parfaits à partir d'une fonction de distribution. L'équation est difficile à résoudre à cause d'un terme de collision complexe. En conséquence, plusieurs modèles simplifiés de ce terme de collision ont été introduits. Les plus connus, utilisés pour des gaz monoatomiques, sont les modèles BGK [1], ES-BGK [2] et Shakhov [3]. Les modèles ES-BGK et Shakhov ont permis de donner un nombre de Prandtl plus réaliste que le modèle BGK. Ces modèles de collision peuvent être résolus analytiquement ou numériquement par une approche linéaire ou non-linéaire. La méthode BGK linéarisée a été introduite par Gross et Jackson en 1959 [4]. Les premiers résultats numériques issus de cette méthode ont été présentés par Cercignani et Daneri en 1963 [5]. L'écoulement raréfié entre deux plaques parallèles a été analysé numériquement par la méthode de discrétisation des ordonnées (discrete ordinate method). Douze ans plus tard, en 1975, Loyalka *et al.* [6] ont calculé numériquement le saut de vitesse à la paroi – incluant le glissement thermique (thermal creep), dernier terme de l'équation (2.10) – pour un écoulement entre deux plaques parallèles avec une réflexion spéculaire-diffuse à la paroi. Par ailleurs, pour un tube de section circulaire, Cercignani et Sernagiotto [7] puis Cercignani et Pagani [8] ont résolu le modèle BGK linéarisé en utilisant respectivement une méthode numérique directe et une méthode variationnelle [9]. Dans la même période, Ferziger [10] a étudié analytiquement et numériquement l'écoulement de gaz dans un tube et a obtenu les expressions analytiques de l'écoulement à proximité du régime moléculaire libre et du

régime continu. Les travaux sur l'écoulement dans un tube ont été poursuivis pour une réflexion diffuse en paroi par Porodnov et Tuchvetov [11] puis par Lo et Loyalka [12] et pour une réflexion spéculaire-diffuse par Porodnov et Tuchvetov [11] puis par Lo *et al.* [12]. En 1985, Valougeorgis [13] a résolu le modèle BGK linéarisé pour un problème d'écoulement de Poiseuille avec glissement thermique dans un tube circulaire par la méthode proposée par Sewart *et al.* [34]. Enfin, l'écoulement dans un canal de section rectangulaire a été traité numériquement par Loyalka *et al.* en 1976 [14].

Les études sur la théorie cinétique des mélanges gazeux sont encore limitées par comparaison avec le grand nombre d'articles publiés sur les cas de gaz simple. Même si les modèles développés pour un gaz simple peuvent être appliqués pour un mélange comme présenté dans les références [15][16], des méthodes alternatives ont été proposées spécifiquement pour le mélange [17][18]. La plupart des recherches ont pour objectif l'estimation des coefficients de viscosité et des coefficients thermiques pour des problèmes semi-infinis. En adoptant la méthode des différences finies utilisée par Sone *et al.* (1989) pour un gaz simple, Takata *et al.* ont calculé numériquement l'écoulement d'un mélange de gaz à partir de l'équation de Boltzmann linéarisée [20]. Sewart et Valougeorgis ont traité différemment le problème de mélange dans un semi-espace en utilisant le modèle de McCormack résolu analytiquement par la méthode des ordonnées-discrètes [21]. Le modèle de McCormack a été récemment appliqué à l'écoulement dans des microconduites pour des applications microfluidiques [22][23][24][25].

De nos jours, même s'il est possible de résoudre l'équation exacte de Boltzmann dans des cas simplifiés en utilisant les ordinateurs modernes, les modèles d'équations cinétiques permettent d'obtenir des résultats fiables avec un temps de calcul convenable. Deux modèles d'équations cinétiques ont été choisis dans ce travail : le modèle BGK pour les gaz simples et le modèle de McCormack pour les mélanges. Les deux modèles satisfont les lois de conservation et le théorème H. Bien que le modèle BGK ne donne pas un nombre de Prandtl réaliste, ce n'est pas un souci pour des simulations en écoulement isotherme. L'analyse des deux modèles est présentée dans le paragraphe 3.2.2. Pour

résoudre les deux modèles, un outil analytique ou numérique est nécessaire. Ils sont introduits dans le paragraphe suivant.

### 3.1.3. Les différentes approches pour le traitement de l'équation de Boltzmann

La résolution de l'équation de Boltzmann par les modèles cinétiques peut se faire analytiquement ou numériquement [26] à l'aide des méthodes suivantes :

1. Méthode analytique
2. Méthode variationnelle [27]
3. Méthode des moments intégrés « integro-moment method » [28]
4. Méthode des vitesses discrètes « discrete velocity method, DVM » [29] [30].

C'est la méthode des vitesses discrètes qui est utilisée dans ce travail. Les avantages de cette méthode de calcul numérique résident dans sa capacité à calculer l'écoulement dans des géométries assez complexes en appliquant la méthode des différences finies. Elle donne des résultats assez bons dans tous les régimes d'écoulement.

## 3.2. Approche cinétique

### 3.2.1. Equation de Boltzmann

Les solutions de la théorie cinétique sont valables dans tous les régimes d'écoulement, du moléculaire libre à l'hydrodynamique. Cette approche s'appuie sur une description statistique de la distribution des molécules du milieu gazeux à l'aide de la fonction de distribution  $f(t, \mathbf{r}, \xi)$  où  $t$  est le temps,  $\mathbf{r}(x, y, z)$  le vecteur position et  $\xi(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$  le vecteur vitesse des molécules. La fonction de distribution respecte l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{r}, \xi)}{\partial t} + \xi \frac{\partial f(t, \mathbf{r}, \xi)}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f(t, \mathbf{r}, \xi)}{\partial \xi} = Q(ff_*) \quad (3.1)$$

Dans laquelle  $\mathbf{F}$  est la force externe et  $Q(ff_*)$  est l'opérateur intégral de collision qui décrit le bilan d'interaction des molécules et dépend du potentiel d'interaction entre



celles-ci. L'équation de Boltzmann est une équation intégral-différentielle complexe, difficile à résoudre avec les outils informatiques actuels [31], d'où l'utilisation de modèles cinétiques pour décrire le terme de collision.

### 3.2.2. Les modèles de Boltzmann linéarisés

#### 3.2.2.1 Le modèle BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) pour les gaz simples

C'est le modèle le plus simple et le plus utilisé pour les écoulements isothermes. Il consiste à remplacer l'opérateur de collision par une différence entre la fonction de distribution inconnue et une distribution locale Maxwellienne :

$$\mathcal{Q}_{BGK}(ff^*) = -\nu [f(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) - f_{loc}^M(n, T, \mathbf{u})] \quad (3.2)$$

où  $\nu$  est la fréquence de collision. La fonction de distribution locale de Maxwell s'écrit

$$f_{loc}^M(n, T, \mathbf{u}) = n(t, \mathbf{r}) \left( \frac{m}{2\pi k_B T(t, \mathbf{r})} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}(t, \mathbf{r}))^2}{2k_B T(t, \mathbf{r})} \right), \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{u}$  représente le vecteur vitesse macroscopique locale. Si l'état de gaz est faiblement non-équilibré, l'équation de Boltzmann peut être linéarisée autour de la solution de Maxwell en supposant une petite perturbation de la fonction de distribution de vitesse. Par contre, l'état du gaz peut quelquefois largement s'écarter d'un état d'équilibre local. La fonction de distribution linéarisée peut s'écrire

$$f(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) = f_0^M [1 + \Phi(t, \mathbf{r}', \boldsymbol{\xi}')], \quad |\Phi| \ll 1 \quad (3.4)$$

où  $\Phi$  est la fonction de perturbation et  $f_0^M$  est la fonction de distribution d'équilibre de Maxwell relative à la densité moléculaire d'équilibre  $n_0$  et à la température d'équilibre  $T_0$  :

$$f_0^M = n_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T_0} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}_0)^2}{2k_B T_0} \right). \quad (3.5)$$

Après un développement en série de Taylor à l'ordre 1, la distribution de Maxwell peut s'écrire en fonction de la fonction de distribution absolue :

$$f_{loc}^M(n, T, \mathbf{u}) = f_0^M \left[ 1 + \wp + \frac{m}{k_B T_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} + \tau \left( \frac{m \boldsymbol{\xi}^2}{2k_B T_0} - \frac{3}{2} \right) \right] \quad (3.6)$$

où les perturbations de la densité moléculaire et de la température sont  $\wp = \frac{n - n_0}{n_0}$ ,

$\tau = \frac{T - T_0}{T_0}$ . En injectant les équations (3.4) et (3.6) dans l'équation (3.2), on obtient le

terme de collision et l'équation de Boltzmann pour l'écoulement permanent peut alors s'écrire sous la forme adimensionnelle

$$\boldsymbol{\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} = \nu \left[ \wp + \frac{m}{k_B T_0} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} + \tau \left( \frac{m \boldsymbol{\xi}^2}{2k_B T_0} - \frac{3}{2} \right) - \Phi \right]. \quad (3.7)$$

La fonction de perturbation de l'équation de BGK linéarisée peut se décomposer de manière linéaire. Pour un écoulement de Poiseuille isotherme, elle s'écrit

$$\Phi(\mathbf{r}', \boldsymbol{\xi}') = h_p(\mathbf{r}', \boldsymbol{\xi}') X_p + z' X_p \quad (3.8)$$

où le vecteur position adimensionnel et la vitesse adimensionnelle des molécules sont

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{H}, \quad \boldsymbol{\xi}' = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi} \quad (3.9)$$

et

$$X_p = \frac{1}{P} \frac{dP}{dz'}, \quad |X_p| \ll 1. \quad (3.10)$$

représente la perte de charge relative adimensionnelle le long de la direction  $z$ .

### 3.2.2.2. Le modèle de McCormack pour les mélanges gazeux

On considère un microcanal de section rectangulaire de largeur  $B = 2b$ , de profondeur  $H = 2h$  et de longueur  $L$ . Le rapport de forme de la section est défini par  $a = h/b$  où la profondeur  $H$  est la plus petite dimension. Les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  sont utilisées. Ainsi, la largeur et la profondeur de la section sont définies par

$$-\frac{B}{2} \leq x \leq \frac{B}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{H}{2} \leq y \leq \frac{H}{2}.$$

Les coordonnées adimensionnelles  $\left(x' = \frac{x}{H}, y' = \frac{y}{H}, z' = \frac{z}{H}\right)$  sont également introduites.

Le paramètre de raréfaction d'un mélange est défini par

$$\delta' = \frac{HP_0}{\mu} \sqrt{\frac{m}{2k_B T_0}} \quad (3.11)$$

où  $P_0$  et  $T_0$  sont la pression et la température d'équilibre du mélange, tandis que  $\mu$  est la viscosité du mélange à  $T_0$ . La masse moléculaire moyenne du mélange est donnée par

$$m = m_1 C_0 + (1 - C_0) m_2 \quad (3.12)$$

où

$$C_0 = \frac{n_{0,1}}{n_{0,1} + n_{0,2}} \quad (3.13)$$

est la concentration molaire à l'équilibre,  $m_\alpha$  et  $n_{0,\alpha}$  (pour  $\alpha = 1, 2$ ) dénotent respectivement la masse d'une molécule et la densité moléculaire en équilibre de chaque espèce. L'écoulement est généré par de petits gradients longitudinaux de pression, température et concentration définis par [25]

$$X_p = \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial z'}, \quad X_T = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z'}, \quad X_c = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial z'} \quad (3.14)$$

et tels que

$$|X_p| \ll 1, \quad |X_T| \ll 1, \quad |X_c| \ll 1. \quad (3.15)$$

$C$  est la concentration molaire du mélange dans la section donnée

$$C = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad (3.16)$$

où  $n_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) est la densité moléculaire de l'espèce gazeuse  $\alpha$ . La fonction de distribution linéarisée et adimensionnalisée pour chaque espèce  $\alpha$  peut s'écrire

$$f_\alpha(\mathbf{r}', \xi'_\alpha) = f_\alpha^M(\mathbf{r}', \xi'_\alpha) [1 + h_\alpha(x', y', \xi'_\alpha)], \quad |h_\alpha| \ll 1 \quad (3.17)$$

où  $h_\alpha$  est la fonction de perturbation et la vitesse des molécules est adimensionnalisée par

$\xi'_\alpha = \sqrt{\frac{m_\alpha}{2k_B T_0}} \xi_\alpha$  et la fonction de distribution locale de Maxwell s'écrit

$$f_\alpha^{(M)}(z', \xi'_\alpha) = n_\alpha(z') \left[ \frac{m_\alpha}{2\pi k_B T(z')} \right]^{3/2} \exp \left[ -\frac{\xi'^2_\alpha}{T(z')/T_0} \right]. \quad (3.18)$$

Par suite, le système des équations cinétiques de Boltzmann s'écrit [18] [25]

$$\xi'_{\alpha x} \frac{\partial h_\alpha}{\partial x} + \xi'_{\alpha y} \frac{\partial h_\alpha}{\partial y} = \omega_\alpha \sum_{\beta=1}^2 \hat{L}_{\alpha\beta} h_\alpha - \xi'_\alpha \left[ X_p + \eta_\alpha X_c + \left( \xi'^2_\alpha - \frac{5}{2} \right) X_T \right] \quad (3.19)$$

avec

$$\omega_\alpha = H \sqrt{\frac{m_\alpha}{2kT_0}} \quad (3.20)$$

et

$$\eta_1 = 1, \quad \eta_2 = \frac{C_0}{1 - C_0}. \quad (3.21)$$

Le terme de collision est proposé par McCormack [25]. Pour un écoulement dans un canal de section rectangulaire, le terme de collision de McCormack linéarisé s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{L}_{\alpha\beta} h_\alpha = & -\gamma_\alpha h_\alpha + 2\sqrt{\frac{m_\alpha}{m}} \left[ \gamma_\alpha u'_\alpha - v_{\alpha\beta}^{(1)} (u'_\alpha - u'_\beta) - \frac{1}{2} v_{\alpha\beta}^{(2)} \left( q'_\alpha - \frac{m_\alpha}{m_\beta} q'_\beta \right) \right] \xi'_{z,\alpha} \\ & + 4 \left[ \left( \gamma_{\alpha\beta} - v_{\alpha\beta}^{(3)} \right) \Pi'_{xz,\alpha} + v_{\alpha\beta}^{(4)} \Pi'_{xz,\beta} \right] \xi'_{z,\alpha} \xi'_{x,\alpha} \\ & + 4 \left[ \left( \gamma_{\alpha\beta} - v_{\alpha\beta}^{(3)} \right) \Pi'_{yz,\alpha} + v_{\alpha\beta}^{(4)} \Pi'_{yz,\beta} \right] \xi'_{z,\alpha} \xi'_{y,\alpha} \\ & + \frac{4}{5} \sqrt{\frac{m_\alpha}{m}} \left[ \left( \gamma_{\alpha\beta} - v_{\alpha\beta}^{(5)} \right) q'_\alpha + v_{\alpha\beta}^{(6)} \sqrt{\frac{m_\beta}{m_\alpha}} q'_\beta - \frac{5}{4} v_{\alpha\beta}^{(2)} (u'_\alpha - u'_\beta) \right] \xi'_{z,\alpha} \left( \xi'^2_\alpha - \frac{5}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

pour  $\alpha, \beta = 1, 2$ . Les  $\gamma_{\alpha\beta}$  sont proportionnels à la fréquence de la collision entre les deux espèces  $\alpha$  et  $\beta$  et ils apparaissent seulement dans les combinaisons  $\gamma_1 = \gamma_{11} + \gamma_{12}$  et  $\gamma_2 = \gamma_{21} + \gamma_{22}$  où

$$\gamma_\alpha = \frac{P_\alpha}{\mu_\alpha} = \frac{S_\alpha S_\beta - v_{\alpha\beta}^{(4)} v_{\beta\alpha}^{(4)}}{S_\beta + v_{\alpha\beta}^{(4)}} \quad (3.23)$$

et

$$S_\alpha = v_{\alpha\alpha}^{(3)} - v_{\alpha\alpha}^{(4)} + v_{\alpha\beta}^{(3)}. \quad (3.24)$$

Les expressions de  $v_{\alpha\beta}^{(i)}$  sont

$$v_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{16}{3} \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} n_\beta \Omega_{\alpha\beta}^{(11)}, \quad (3.25)$$

$$v_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{64}{15} \left( \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \right)^2 n_\beta \left( \Omega_{\alpha\beta}^{(12)} - \frac{5}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{(22)} \right), \quad (3.26)$$

$$v_{\alpha\beta}^{(3)} = \frac{16}{5} \frac{m_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha m_\beta} n_\beta \left( \frac{10}{3} \Omega_{\alpha\beta}^{(11)} + \frac{m_\beta}{m_\alpha} \Omega_{\alpha\beta}^{(22)} \right), \quad (3.27)$$

$$v_{\alpha\beta}^{(4)} = \frac{16}{5} \frac{m_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha m_\beta} n_\beta \left( \frac{10}{3} \Omega_{\alpha\beta}^{(11)} - \Omega_{\alpha\beta}^{(22)} \right), \quad (3.28)$$

$$v_{\alpha\beta}^{(5)} = \frac{64}{15} \left( \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \right)^3 \frac{m_\alpha}{m_\beta} n_\beta \left[ \Omega_{\alpha\beta}^{(22)} + \left( \frac{15m_\alpha}{4m_\beta} + \frac{25}{8} \frac{m_\beta}{m_\alpha} \right) \Omega_{\alpha\beta}^{(11)} - \frac{1}{2} \frac{m_\beta}{m_\alpha} \left( 5\Omega_{\alpha\beta}^{(12)} - \Omega_{\alpha\beta}^{(13)} \right) \right] \quad (3.29)$$

$$v_{\alpha\beta}^{(6)} = \frac{64}{15} \left( \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \right)^3 \left( \frac{m_\alpha}{m_\beta} \right)^{3/2} n_\beta \left[ -\Omega_{\alpha\beta}^{(22)} + \frac{55}{8} \Omega_{\alpha\beta}^{(11)} - \frac{5}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{(12)} + \frac{1}{2} \Omega_{\alpha\beta}^{(13)} \right], \quad (3.30)$$

où

$$m_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)}. \quad (3.31)$$

Les termes  $\Omega_{\alpha\beta}^{(kl)}$  représentent les intégrales de Chapman-Cowling [32]. Pour un potentiel réaliste, elles sont calculées par les expressions données dans [33].

### 3.2.3. Conditions aux limites

L'interaction entre gaz et paroi est modélisée par une réflexion diffuse-spéculaire de Maxwell. A la paroi, on introduit

$$Y_\alpha^+ = (1 - \sigma_{v,\alpha}) Y_\alpha^- \quad (3.32)$$

où  $Y^+$  et  $Y^-$  sont les fonctions de distribution des molécules au départ et à l'arrivée de la paroi et  $\alpha = 1, 2$  dénote les espèces du gaz dans le mélange.

### 3.3. Procédure de calcul numérique

#### 3.3.1. Généralités

Le principe du calcul numérique par la méthode des vitesses discrètes est présenté sur la Figure 3.1. Il s'agit d'une procédure itérative pour calculer le débit massique. Le calcul commence par une initialisation de la vitesse macroscopique  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . La vitesse macroscopique initiale est injectée dans l'équation générale pour déterminer la fonction de distribution  $Y(\mathbf{r}, \xi)$ . Cette fonction de distribution est alors utilisée pour calculer la nouvelle valeur de la vitesse macroscopique. L'itération est répétée jusqu'à ce qu'un critère portant sur des résidus de calcul soit satisfait. Le débit peut alors être calculé par intégration de la vitesse macroscopique dans l'espace physique.

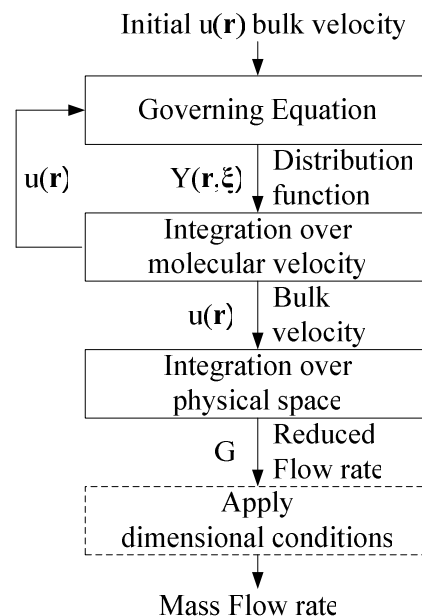


Figure 3.1 : Principe du calcul numérique

### 3.3.2. Gaz monoatomique

Lorsque l'écoulement est développé selon la direction longitudinale, la composante  $\xi'_z$  de la vitesse adimensionnelle moléculaire suivant cette direction  $z$  est éliminée par une projection de l'équation (3.7) adimensionnée dans le plan  $(\xi'_x, \xi'_y)$ . La procédure de linéarisation et de projection du modèle BGK est présentée sur la Figure 3.2.

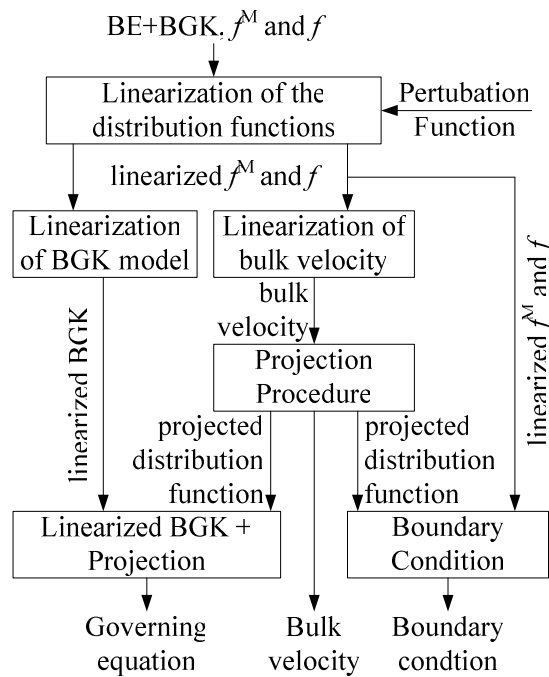


Figure 3.2 : Procédure de linéarisation et projection

Suite à l'étape précédente, l'équation de Boltzmann linéarisée sous forme adimensionnelle pour un écoulement de Poiseuille peut alors se mettre sous la forme

$$\xi'_x \frac{\partial Y}{\partial x'} + \xi'_y \frac{\partial Y}{\partial y'} + \delta Y = \delta u'_z - \frac{1}{2} \quad (3.33)$$

où  $Y = Y(x', y', \xi'_x, \xi'_y)$  est la fonction de distribution réduite. La vitesse macroscopique

$$u'_z(x', y') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y \exp[-\xi_x'^2 - \xi_y'^2] d\xi_x' d\xi_y' \quad (3.34)$$

est adimensionnalisée de la façon suivante :

$$u'_z = \frac{u}{\xi X_p} \quad (3.35)$$

Les conditions aux limites à la paroi dans une section rectangulaire s'écrivent :

$$Y\left(-\frac{B}{2H}, y', \xi_x', \xi_y'\right) = (1 - \sigma_v) Y\left(-\frac{B}{2H}, y', -\xi_x', \xi_y'\right), \xi_x' > 0, -\infty < \xi_y' < \infty, \quad (3.36)$$

$$Y\left(\frac{B}{2H}, y', \xi_x', \xi_y'\right) = (1 - \sigma_v) Y\left(\frac{B}{2H}, y', -\xi_x', \xi_y'\right), \xi_x' < 0, -\infty < \xi_y' < \infty, \quad (3.37)$$

$$Y\left(x', -\frac{1}{2}, \xi_x', \xi_y'\right) = (1 - \sigma_v) Y\left(x', -\frac{1}{2}, \xi_x', -\xi_y'\right), -\infty < \xi_x' < \infty, \xi_y' > 0, \quad (3.38)$$

$$Y\left(x', \frac{1}{2}, \xi_x', \xi_y'\right) = (1 - \sigma_v) Y\left(x', \frac{1}{2}, \xi_x', -\xi_y'\right), -\infty < \xi_x' < \infty, \xi_y' < 0 \quad (3.39)$$

où  $x' \in \left[-\frac{B}{2H}, \frac{B}{2H}\right]$  et  $y' \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . En associant les équations (3.33) et (3.34) avec les

conditions aux limites précédentes, l'écoulement de Poiseuille à travers le microcanal de section rectangulaire peut être calculé à l'aide de la procédure présentée dans le paragraphe 3.3.1. Davantage de détails sur la méthode de calcul peuvent être trouvés dans [29] [30]. Pour diminuer le temps de calcul et limiter les ressources informatiques nécessaires, les deux composantes de la vitesse moléculaire sont écrites en fonction des coordonnées polaires

$$\xi_x' = \zeta \cos \theta, \quad \xi_y' = \zeta \sin \theta \quad (3.40)$$

Avec une amplitude  $0 \leq \zeta \leq \infty$  et un angle  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Ensuite, la discrétisation de la vitesse moléculaire est effectuée par une décomposition en série  $(\zeta_m, \theta_n)$  de la vitesse, par exemple par les méthodes de Gauss, Gauss-Hermite, ou de Legendre. Les amplitudes et les angles discrets sont définis par

$$0 \leq \zeta_m \leq \infty, \quad 0 \leq \theta_n \leq 2\pi, \quad (3.41)$$



où  $m = 1, 2, \dots, M$  et  $n = 1, 2, \dots, N$ . En introduisant les coordonnées polaires et la discrétisation, les équations (3.33) et (3.34) deviennent

$$\zeta_m \cos \theta_n \frac{\partial Y_{m,n}^{(k+1/2)}}{\partial x} + \zeta_m \sin \theta_n \frac{\partial Y_{m,n}^{(k+1/2)}}{\partial y} + \delta Y_{m,n}^{(k+1/2)} = \delta u_z^{(k)} - \frac{1}{2} \quad (3.42)$$

et

$$u_z'(x', y')^{(k+1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty Y(x', y', \zeta_m, \theta_n)^{(k+1/2)} e^{-\zeta_m^2} \zeta d\zeta d\theta. \quad (3.43)$$

Les équations (3.42) et (3.43) sont résolues de manière itérative comme indiqué dans le paragraphe 3.3.1. L'indice  $k$  représente l'indice d'itération. Pour chaque itération, le système d'équations (3.42)-(3.43) est résolu en utilisant également une discrétisation de l'espace physique. La section du canal est divisée en petits éléments rectangulaires. Les équations sont implémentées au centre de chaque élément par une méthode de différences finies à l'ordre deux. Une fois les équations résolues, les quantités macroscopiques peuvent être calculés à partir des résultats. On s'intéresse au débit massique  $\dot{m}$  que l'on compare aux mesures expérimentales. Celui-ci est calculé à partir du débit adimensionnel  $G'$  à l'aide de l'équation

$$\dot{m} = G' \frac{H(HB) \Delta P}{\xi L}, \quad (3.44)$$

où  $\frac{\Delta P}{L}$  est le gradient de pression,  $G'$  étant adimensionné par la profondeur  $H$  du microcanal :

$$G' = 2 \frac{H}{B} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-W/2H}^{W/2H} u_z'(x', y') dx' dy'. \quad (3.45)$$

Notons que les résultats présentés dans ce travail sont généralement adimensionnés par le diamètre hydraulique  $D_H$ . La définition du débit  $G$  adimensionné par  $D_H$  s'écrit alors

$$G = \dot{m} \frac{\xi}{(BH) D_h} \frac{L}{\Delta P}. \quad (3.46)$$

Les quantités  $G$  ou  $G'$  sont calculées à partir de rapport de forme de la section adimensionnelle et d'un paramètre de raréfaction moyen  $\delta_0 = (\delta_A + \delta_B)/2$  ou

$\delta'_0 = (\delta'_A + \delta'_B)/2$ ,  $\delta_A$  ou  $\delta'_A$  et  $\delta_B$  ou  $\delta'_B$  correspondant aux pressions amont  $P_A$  et aval  $P_B$ , avec une adimensionnalisation par la profondeur  $H$  pour  $\delta$  ou le diamètre hydraulique  $D_H$  pour  $\delta'$ . On rappelle que la relation entre nombre de Knudsen et paramètre de raréfaction est donné par  $Kn = \sqrt{\pi}/2\delta$ .

### 3.3.3. Mélange gazeux

En adoptant la méthode de calcul numérique précédemment présentée, on peut simuler l'écoulement d'un mélange de gaz à travers un microcanal de section rectangulaire à l'aide du modèle de McCormack. Deux types d'écoulements sont générés en imposant un gradient de pression avec une condition isotherme.

- On observe d'une part un écoulement de Poiseuille. Il s'agit de l'effet direct du gradient de pression comme dans le cas d'un écoulement de gaz simple. Le débit adimensionnel généré par ce type d'écoulement est noté  $G'_{PP}$ .
- D'autre part, il apparaît un écoulement secondaire généré par l'effet de barodiffusion qui correspond à une diffusion inter-espèces sous l'effet d'un gradient de pression. Son débit adimensionnel est noté  $G'_{CP}$ .

Le débit massique est alors calculé à partir de ces deux débits adimensionnels :

$$\dot{m} = [G'_{PP} + G'_{BD}] \frac{H(HB) \Delta P}{\xi L} \quad (3.47)$$

avec

$$G'_{BD} = -\frac{(m_2 - m_1)}{m} (1 - C_0) G'_{CP}. \quad (3.48)$$

### Références Bibliographiques

- [1] Bhatnagar, P. L., Gross, E.P., Krook, M. (1954). "A model for collision process in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems." *Physical Review*, **94**(3), 511-525.
- [2] Holway, J., Lowell H. (1966). "New statistical models for kinetic theory: models of construction." *Physics of fluids*, **9**(9), 1653-1673.

- [3] Shakhov, E. M. (1974). "Method of Investigation of rarefied gas flows." Nauka Moscow (in Russian).
- [4] Gross, E. P., Jackson, E. Atlee. (1959). "Kinetic models and the linearized Boltzmann equation." *Phys. Fluids*, **2**(4), 432-441.
- [5] Cercignani, C., Daneri, A. (1963). "Flow of rarefied gas between two parallel plates." *Journal of Applied Physics*, **34**(12), 3509-3513.
- [6] Loyalka, S. K., Petrellie, N., Stvorick, S.T. (1975). "Some numerical results for the BGK model: Thermal creep and viscous slip problems with arbitrary accommodation at the surface." *Physics of fluids*, **18**(9), 1094-1099.
- [7] Cercignani, C., Sernagiotto, F. . (1966). "Cylindrical poiseuille flow of rarefied gas." *Physics of fluids*, **9**(1), 40-44.
- [8] Cercignani, C., and Pagani, C. D. "Variational approche to rarefied flows in cylindrical and spherical geometry." in *Rarefied Gas Dynamics*, New York.
- [9] Ewart, T. (2007). *Etude des écoulements gazeux isothermes en microconduit : du régime hydrodynamique au proche régime moléculaire libre*. PhD thesis Ecole polytechnique Universitaire de Marseille, Université de Provence, Marseille.
- [10] Ferziger, J. H. (1967). "Flow of a rarefied gas through a cylindrical tube." *Physics of fluids*, **10**(7), 1448-1453.
- [11] Porodnov, B. T., and Tukhvetov, F. T. (1979). "Theoretical investigation of nonisothermal flow of a rarefied gas in a cylindrical capillary." *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, **36**(1), 61-66.
- [12] Lo, S. S., Loyalka, S. K., Stvorik, T.S. (1984). "Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effect. V. Flow of polyatomic gases in a cylindrical tube with arbitrary accommodation at the surface." *J. Chem. Phys.*, **81**(5), 2439-2449.
- [13] Valougeorgis, D., Thomas, J. R., Jr. (1985). "Exact numerical results for Poiseuille and thermal creep flow in cylindrical tube." *Physics of fluids*, **29**(2), 423-429.
- [14] Loyalka, S. K., Stvorick, S.T., Park, H.S. (1976). "Poiseuille flow and thermal creep flow in long, rectangular channels in the molecular and transition flow regimes." *J. Vac. Sci. Technol. A*, **13**(6), 1188-1192.
- [15] Pochuev, N. D., Seleznev, V. D., and Suetin, P. E. (1975). "Flow of a binary gas mixture with arbitrary accommodation of the tangential momentum." *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **15**(5), 613-616.

- [16] Andries, P., Aoki, K., and Pertham, B. (2001). "A consistent BGK-type model for gas mixtures." *Journal of Statistical Physics*, **106**(516), 993-1018.
- [17] Hamel, B. B. (1965). "Kinetic model for binary gas mixtures." *Phys Fluids*, **8**(3), 418-425.
- [18] McCormack, F. J. (1973). "Construction of linearized kinetic models for gaseous mixtures and molecular gases." *Physics of fluids*, **16**(12), 2095-2105.
- [19] Sone, Y., Ohwada, T., and Aoki, K. (1989). "Temperature jump and Knudsen layer in a rarefied gas over a plane wall: Numerical analysis of the linearized Boltzmann equation for hard-sphere molecules." *Phys Fluids A*, **1**(2), 363-370.
- [20] Takata, S., Yasuda, S., Kosuge, S., and Aoki, K. (2003). "Numerical analysis of thermal-slip and diffusion-slip flows of a binary mixture of hard-sphere molecular gases." *Phys Fluids A*, **15**, 3745-3766.
- [21] Siewert, C. E., Valougeorgis, D. (2004). "Concise and accurate solutions to half-space binary-gas flow problems defined by McCormack model and specular-diffuse wall conditions." *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **23**, 709-726.
- [22] Siewert, C. E., Valougeorgis, D. (2004). "The McCormack model: channel flow of a binary gas mixture driven by temperature, pressure and density gradients." *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **23**, 645-664.
- [23] Naris, S., Valougeorgis, D., Kalempa, D., and Sharipov, F. (2004). "Discrete velocity modelling of gaseous mixture flow in MEMS." *Superlattices Microstruct*, **35**, 629.
- [24] Naris, S., Valougeorgis, D., Kalempa, D., and Sharipov, F. (2004). "Gaseous mixture flow between two parallel plates in whole range of the gas rarefaction." *Physica A*, **336**, 294.
- [25] Naris, S., Valougeorgis, D., Kalempa, D., and Sharipov, F. (2005). "Flow of gaseous mixtures through rectangular microchannels driven by pressure, temperature, and concentration gradients." *Physics of fluids*, **17**.
- [26] Sharipov, F., Seleznev, Vladimia. (1998). "Data on International Rarefied Gas Flow." *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, **27**(3).
- [27] Cercignani, C. (1975). *Theory and application of the Boltzmann equation*, Scottish Academic.
- [28] Varoutis, S., Valougeorgis, D., and Sharipov, F. (2008). "Application of the integro-moment method to steady-state two-dimensional rarefied gas flows subject to

- boundary induces discontinuities." *Journal of Computational Physics*, **227**(12), 6272-6287.
- [29] Sharipov, F. (1999). "Rarefied gas flow through a long rectangular channel." *Journal of Vacuum Science and Technology A*, **17**(5), 3062-3066.
- [30] Naris, S., and Valougeorgis, D. (2008). "Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice." *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **27**(6), 810-822.
- [31] Dadzié, S. E. K. (2005). "Conditions aux limites dans un gaz raréfié: loi de réflexion à la paroi, saut de température, glissement de vitesse, couche de Knudsen," Thèse de Doctorat. Université de Provence, Aix-Marseille.
- [32] Chapman, S., and Cowling, T. G. (1970). *The mathematical theory of non-uniform gases*, Cambridge University Press, London.
- [33] Kestin, J., Knierim, K., Mason, E. A., Najafi, B., Ro, S. T., and Waldman, M. (1984). "Equilibrium and transport properties of the noble gases and their mixture at low densities " *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, **13**(1), 229-303.



## Chapitre 4

# Banc d'essais pour la mesure de microdébits gazeux

Différentes méthodes ont été développées pour étudier le comportement des gaz en régime raréfié. Dans ce travail, nous nous intéressons particulièrement à l'étude de micro-écoulements isothermes. Dans la première partie bibliographique de ce chapitre, on commence par référencer les méthodes de mesure adaptées à la mesure des débits de gaz raréfiés, que la raréfaction soit due à une faible pression (systèmes de génération de vide par exemple) ou au confinement (écoulements dans les microsystèmes). On présente ensuite la description de notre banc d'essais et la méthodologie associée. La deuxième partie concerne les méthodes de calcul du débit et des incertitudes. Le chapitre se termine par la description des procédures de mesure et de traitement des données.

### 4.1. Mesures de microdébits et banc d'essais

#### 4.1.1. Méthodes de mesure de microdébits gazeux

Les premières mesures de débits de micro-écoulements gazeux ont été réalisées par Sreekanth [1]. Ces mesures ont été réalisées sur de très longs tubes de section circulaire avec des capteurs de débit commerciaux et ont été comparées à des calculs analytiques. Selon l'article de Sreekanth, les débitmètres commerciaux peuvent fonctionner pour certaines gammes de débit, pas trop faibles cependant ; pour des régimes d'écoulement trop raréfié, les performances de ces débitmètres commerciaux deviennent très mauvaises. Arkilic, 25 ans plus tard, a comparé dans sa thèse les

différents débitmètres disponibles en 1994 et les trouvent fiables jusque dans une plage allant de  $10^{-6}$  à  $10^{-9}$  mol/s [2]. Aujourd'hui, les débitmètres basse pression peuvent permettre d'atteindre des débits inférieurs à  $10^{-11}$  mol/s [3]. Cependant, ils restent coûteux et les chercheurs cherchent à mettre au point d'autres moyens pour mesurer les faibles débits de gaz raréfié. On peut classer les méthodes de mesure de microdébits gazeux en deux types principaux :

1. Une méthode basée sur le suivi du déplacement d'une goutte liquide : Harley *et al.* ont mesuré le débit volumique de gaz traversant des microtubes de section trapézoïdale en suivant un ménisque liquide dans un tube capillaire grâce à un microscope [4]. Plusieurs autres auteurs ont utilisé cette méthode de mesure [5][6]. Notre équipe a également employé cette méthode mais la technique de détection est légèrement différente : on suit le mouvement de la goutte à l'aide d'un système de capteurs optoélectroniques [7][8].
2. Une méthode de mesure indirecte du débit de gaz exploitant la loi des gaz parfaits : dans un système isotherme, le débit massique peut être déduit de la mesure des variations de volume ou de pression. Ces deux variantes seront appelées respectivement techniques à pression constante ou à volume constant. La technique à pression constante est technologiquement difficile à mettre en œuvre car elle nécessite l'utilisation d'un piston ou d'une membrane pour contrôler et faire varier le volume de façon à maintenir la pression constante [3][9]. En revanche, le dispositif à volume constant est plus facile à utiliser puisqu'il ne nécessite que la mesure précise de la variation de pression dans un réservoir fermé [10]. Par contre, ces techniques s'avèrent sensibles aux fluctuations thermiques [2].

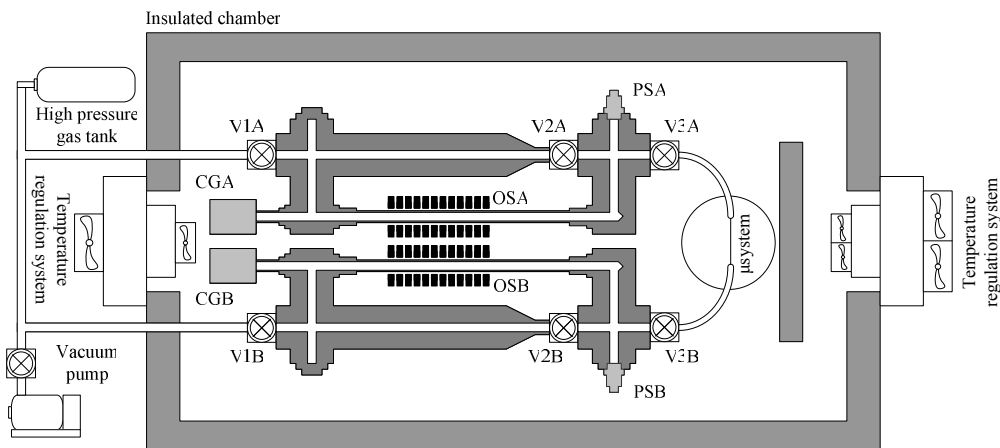
Pour mesurer le débit massique à travers un microsystème, nous avons développé un nouveau banc d'essais qui combine ces deux techniques :

- une méthode de mesure basée sur le suivi du déplacement d'une goutte liquide, notée DG par la suite,
- et une méthode à volume constant, notée VC.



Cette double mesure peut être faite à l'entrée et à la sortie du microsystème. Les détails du banc sont présentés ci-dessous.

### 4.1.2. Description du banc d'essais et méthodologie de mesure



*Figure 4.1* : Le schéma représentatif du banc d'essais.

Un des avantages de notre dispositif expérimental est qu'il permet d'accéder au débit massique traversant un microsystème à l'aide d'une double mesure grâce aux deux méthodes précédemment introduites. Dans la première méthode (DG), les débits volumiques sont déduits par suivi de gouttes liquides dans des pipettes calibrées connectées à l'entrée et à la sortie du microsystème. Deux séries de capteurs optoélectroniques (notés OSA et OSB sur la Figure 4.1) sont utilisées pour détecter le mouvement des gouttes liquides dans ces deux pipettes. Durant la phase de mesure, les vannes V2A et V2B sont fermées : ainsi l'écoulement se fait depuis le réservoir amont vers, successivement, la pipette amont, le microsystème et enfin la pipette aval, en poussant chacune des gouttes calibrées placées dans chacune des pipettes. Basée sur les mêmes conditions expérimentales, la méthode à volume constant (VC) peut être utilisée parallèlement. Si cette dernière méthode est employée seule, les vannes V2A et V2B n'ont pas besoin d'être fermées. Il est alors seulement nécessaire de mesurer les variations de pression à l'amont et à l'aval du microsystème. Ces pressions sont

enregistrées et affichées en direct et les mesures sont effectuées avec deux types de capteurs :

- les capteurs PSA et PSB piézorésistifs de marque Kulite®
- et les capteurs CGA et CGB à diaphragme capacitif de marque Inficon®.

Les capteurs piézorésistifs PSA et PSB sont utilisés pour les mesures de pression au-dessus de la pression atmosphérique. Les capteurs CGA et CGB à diaphragme capacitif sont utilisés pour les mesures à basse pression et leur gamme est choisie en fonction des plages de pression. Le Tableau 4.1 présente les caractéristiques des capteurs utilisés.

Capteur	Inficon® CG			Kulite® PS
	025-1000 Torr	025-100 Torr	025-10 Torr	375M-3.5BarA
Pression pleine échelle (Pa)	$1,333 \cdot 10^5$	$1,333 \cdot 10^4$	$1,333 \cdot 10^3$	$3,5 \cdot 10^5$
Pression max admissible (Pa)	$1,333 \cdot 10^5$	$1,333 \cdot 10^4$	$1,333 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^5$
Pression min. (Pa)	$1,333 \cdot 10^4$	$1,333 \cdot 10^3$	$1,333 \cdot 10^2$	NA
Précision	0,2% de la lecture			0,5% pleine échelle
Résolution	0,0015% de la pleine échelle			Infinitésimale

**Tableau 4.1 :** Caractéristiques des capteurs de pression.

La variation de pression amont ou aval due à l'écoulement à travers le microsystème est choisie autour de  $\pm 1\%$  à  $\pm 2\%$  de façon à avoir des variations de pression correspondant à une centaine de fois la résolution du capteur Inficon®. Quelques mesures (comme par exemple celles destinées à quantifier le dégazage – voir paragraphe 4.3.2) sont effectuées avec une variation de pression inférieure à  $\pm 1\%$  mais elle reste toujours égale à plus de 50 fois la résolution du capteur. Pour permettre la détection de cette petite variation de pression dans un temps raisonnable et correspondre à la résolution des capteurs, le volume des réservoirs est ajusté en insérant à l'intérieur une pièce métallique.

Les deux méthodes (suivi de goutte DG, et volume constant VC) sont complémentaires mais elles présentent chacune des inconvénients. La méthode DG est plus compliquée à exploiter car des à-coups dans l'avancée de la goutte peuvent apparaître, à cause d'effets de surface sur la paroi interne de la pipette. La méthode VC

est quant à elle plus sensible aux fluctuations thermiques ; c'est pourquoi Arkilic *et al.* ont développé une technique spécifique avec deux réservoirs thermiquement couplés [11]. Pour pallier à ce problème, notre banc d'essai est régulé thermiquement à l'aide de deux modules Peltier qui permettent de maintenir la température constante et uniforme dans l'enceinte isolée.

## **4.2. Incertitude et problèmes de mesures**

### **4.2.1. Etanchéité du système : contrôles de fuite, de dégazage**

Des vannes et raccords spécifiques pour les applications au vide sont utilisés pour éviter le plus possible des échanges de molécules de gaz entre le milieu extérieur et les réservoirs. Les vannes utilisées sont des vannes VAT® à membrane et sont notées V1A, V2A, V3A, V1B, V2B et V3B sur la Figure 4.1. Les raccords entre les vannes, les capteurs CG et les réservoirs sont de type DN 16 ISO-KF. Les joints sont des joints viton® qui peuvent être utilisés plusieurs fois pour permettre d'interchanger les capteurs de pression. Pour les applications à haute pression, des joints en aluminium peuvent être utilisés. Les autres joints sont des joints Ultra-Torr® de Swagelok.

Le contrôle d'étanchéité du système a été réalisé par un détecteur de fuite à hélium. Le système est mis sous vide avec une pompe primaire et une pompe secondaire. De l'hélium est ensuite répandu à l'extérieur, autour du système. Si l'hélium pénètre à l'intérieur, il est automatiquement détecté par le spectromètre. Ce contrôle d'étanchéité a permis de conclure qu'il n'y avait pas de fuite mesurable sur notre banc d'essais. Par contre, un dégazage non négligeable a été mis en évidence à basse pression.

Des évaluations de ce dégazage sont alors faites en plaçant les deux réservoirs à basse pression (après un pompage de 3 jours) : un dégazage permanent avec un taux constant est mesuré. Ces évaluations permettent de conclure que le niveau de dégazage dépend du niveau de pression, du temps de pompage initial et du gaz utilisé. Du fait de l'importance du dégazage par rapport à l'écoulement de gaz qu'on souhaite mesurer, on

doit le quantifier à chaque essai et l'incertitude totale de la mesure tient compte de l'incertitude sur la mesure du dégazage.

#### 4.2.2. Contrôle de la température

La température souhaitée est imposée par les modules Peltier. La plupart des expériences présentées dans cette thèse sont effectuées autour de 298 K. La température est contrôlée dans l'enceinte isolée et également dans la pièce pour maintenir une température stable et justifier l'hypothèse d'écoulement stationnaire et isotherme. La température est mesurée par 6 capteurs : les deux capteurs (thermocouples) des modules Peltier servent à régler la température automatiquement en fonction de la température mesurée. Les 4 autres capteurs sont des capteurs PT100 d'une précision d'environ 0.15 K (à 298 K) placés au niveau du réservoir amont, du réservoir aval et pour les deux derniers au niveau du microsystème.

#### 4.2.3. Mesure de débit par la méthode DG

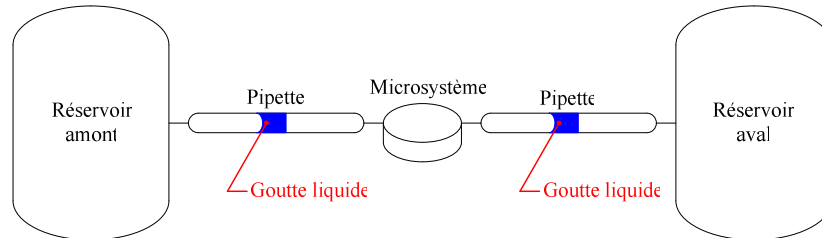
##### 4.2.3.1. Spécificités de ce type de mesure

Dans la méthode de mesure basée sur le suivi du déplacement d'une goutte liquide (DG), le débit est déterminé par la mesure de la vitesse de cette goutte se déplaçant dans un tube calibré (pipette graduée), à partir des instants de passage des fronts de la goutte devant les capteurs optoélectroniques. La mesure ponctuelle du débit volumique tirée de l'information délivrée par deux capteurs voisins se déduit de la relation :

$$Q_{ij} = \frac{V_{ref}}{l_{ref}} \frac{l_{ij}}{\Delta t_{ij}} \quad (4.1)$$

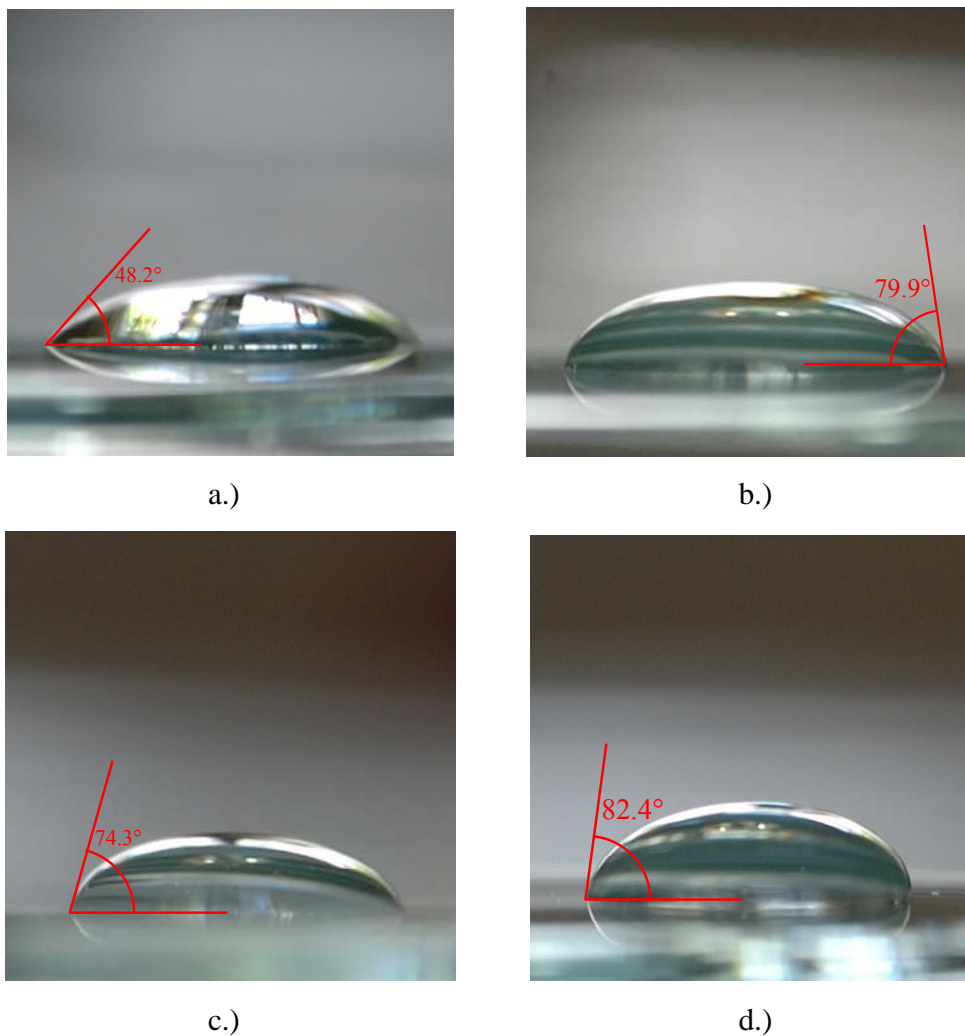
où  $V_{ref}$  est le volume calibré de la pipette,  $l_{ref}$  est la longueur calibrée de celle-ci,  $l_{ij}$  est la distance entre les faisceaux de deux capteurs voisins  $i$  et  $j$  et  $\Delta t_{ij}$  est la durée entre deux détections du même front par les capteurs  $i$  et  $j$ .

Pour effectuer une double mesure, deux pipettes sont placées à l'amont et à l'aval du microsystème (voir Figure 4.2).



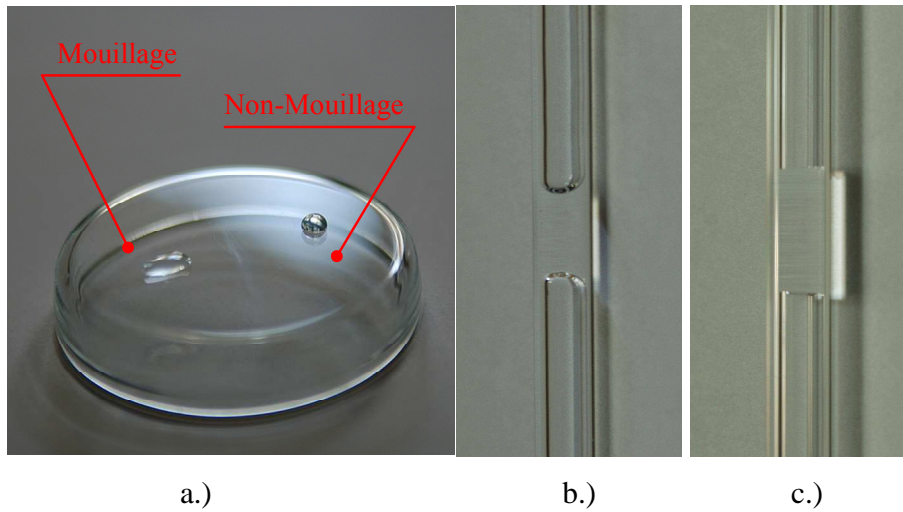
**Figure 4.2 :** Schéma de la méthode de mesure basée sur le suivi du déplacement d'une goutte liquide

La goutte est une goutte de glycérol car la faible valeur de la pression de vapeur saturante de ce liquide permet d'éviter l'évaporation à la surface de la goutte, même à basse pression. Une autre raison pour utiliser le glycérol est son angle de mouillage, qui est plus faible que celui des huiles de pompes à vide. Pour éviter le plus possible l'éventuelle scission de la goutte ou la formation d'une couche liquide à la paroi, la surface des pipettes est traitée de façon à la rendre hydrophobe, à l'aide d'un produit spécifique. Le produit est introduit dans la pipette et il y séjourne plusieurs jours. Le traitement est répété plusieurs fois pour que la surface interne des pipettes soit bien hydrophobe. On a testé plusieurs produits, notamment un Chlorosilane perfluoré, le Fluka 77279 Trichloro(3,3,4,4,5,5,6,6,7,7,8,8,8-tridecafluorooctyl)silane. Les résultats n'ont pas été concluants, peut-être du fait d'un temps de séjour trop court du produit dans la pipette. D'autre part, le coût élevé de ce produit nous a conduits à tester des liquides commercialisés pour le traitement déperlant des pare-brise de voitures. On a ainsi testé plusieurs marques (voir Figure 4.3) et on a retenu celle qui donne le meilleur angle de mouillage (Rain Shield) au contact du Pyrex. L'angle de mouillage du glycérol sur le Pyrex sans traitement est proche de  $0^\circ$ , correspondant à un mouillage parfait.



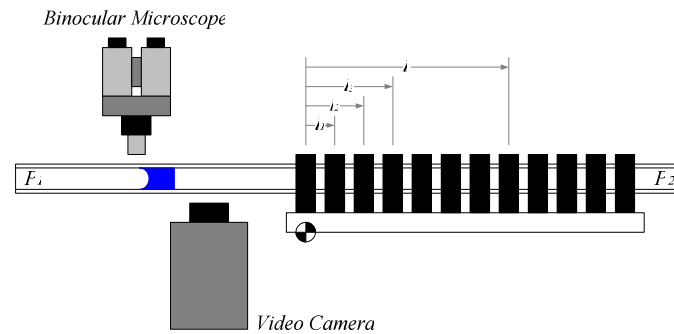
**Figure 4.3:** Goutte de glycérol sur du Pyrex traité par un produit de la marque  
a.) Rain Away, b.) Rain Ban, c.) Rain Out, c.) Rain Shield.

La Figure 4.4 présente une comparaison du mouillage à l'intérieur de la pipette traitée et non-traitée.



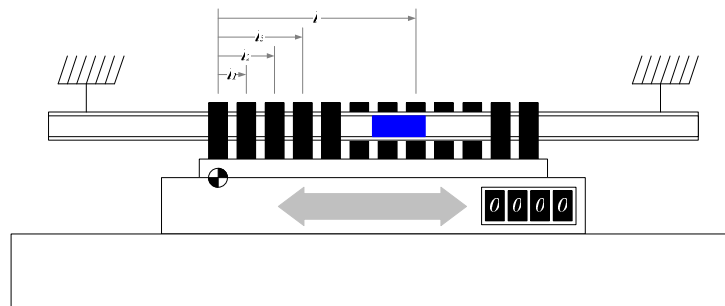
**Figure 4.4:** a.) Goutte d'eau mouillante sur du Pyrex non-traité et goutte non-mouillante sur le Pyrex brut,  
b.) Goutte de glycérol dans une pipette non-traitée,  
c.) Goutte de glycérol dans une pipette traitée.

Plusieurs méthodes pour déterminer la vitesse d'une goutte sont proposées dans la littérature [8][10]. Nous utilisons la méthode développée dans l'équipe par Anduze et Lalonde, qui ont utilisé une série de capteurs optoélectroniques. Le mouvement de la goutte est déduit du temps de passage du front amont (ou aval) de la goutte quand il passe devant chaque couple de capteurs. L'incertitude est donc liée directement à la calibration de la position de chaque capteur optoélectronique et au volume des pipettes. Il existe deux possibilités pour étalonner ce système de mesure. La première, *in situ*, consiste à déplacer une goutte liquide (Figure 4.5) par différence de pression et en utilisant un binoculaire microscopique (1/20 mm de précision) ou un caméscope, sa vitesse est mesurée. La distance entre deux capteurs optiques est alors déterminée en chronométrant la durée entre deux déclenchements.



**Figure 4.5 :** Etalonnage des capteurs optoélectroniques par la méthode in situ

L'avantage de cette méthode est de déplacer une goutte dont la forme est la même que celle d'une expérience réelle. Par contre, il est difficile de maintenir un écoulement permanent et une petite variation de température peut perturber l'étalonnage.



**Figure 4.6 :** Etalonnage des capteurs optoélectroniques par la méthode ex situ

La deuxième méthode s'effectue hors de l'enceinte et consiste à placer une goutte fixe dans la pipette. L'étalonnage est alors réalisé en translatant les capteurs optoélectroniques placés sur une plateforme micrométrique. Leur déclenchement en passant devant la goutte est mesurée avec une précision 0,01 mm. Etant donnée la faible vitesse de déplacement de la goutte et donc sa faible modification de forme dans les expériences réelles, c'est cette méthode qui a été retenue car elle permet une meilleure précision de la mesure des distances inter capteurs.



#### 4.2.3.2. Incertitude de la méthode de mesure

L'incertitude maximale sur le débit volumique est calculée par :

$$\frac{\Delta Q_{ij}}{Q_{ij}} = \frac{\Delta V_{ref}}{V_{ref}} + \frac{\Delta l_{ref}}{l_{ref}} + \frac{\Delta l_{ij}}{l_{ij}} + \frac{\Delta(\Delta t_{ij})}{t_{ij}} \quad (4.2)$$

Le premier terme  $\frac{\Delta V_{ref}}{V_{ref}}$  de cette équation est relatif à l'incertitude sur le volume de la pipette étalonné par PROLABO ou VWR international et estimée par le constructeur à  $\pm 1 \%$ .

Le deuxième terme  $\frac{\Delta l_{ref}}{l_{ref}}$  correspond à l'incertitude sur la mesure de la distance entre les deux graduations de la pipette correspondant au volume calibré  $V_{ref}$ . Ces distances ont été mesurées à l'aide d'un binoculaire avec une incertitude de  $\pm 2 \%$ .

Le troisième terme  $\frac{\Delta l_{ij}}{l_{ij}}$  est relatif à l'incertitude sur la distance entre les faisceaux de deux capteurs consécutifs  $i$  et  $j$ , mesurée à l'aide de la platine micrométrique. Il est estimé à  $\pm 0.1 \%$ .

L'incertitude totale (maximale) de cette méthode de mesure est donc de  $\pm 3,1 \%$ .

L'incertitude par la méthode de la somme des carrés (root-sum square - RSS) est  $\sqrt{(1\%)^2 + (2\%)^2 + (0,1\%)^2} = 2,24\%$ .

#### 4.2.4. Mesure de débit par la méthode VC

Pour la méthode à volume constant, le débit massique est calculé en se basant sur la loi des gaz parfaits :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{PV}{RT} \right) \quad (4.3)$$

qui est appliquée aux circuits A et B et où  $m$ ,  $V$ ,  $P$ ,  $R$  et  $T$  sont respectivement la masse de gaz considérée, le volume du circuit, la pression, la constante spécifique du gaz et la température. Le débit massique traversant le microsystème est alors défini par [10]

$$\dot{m} = \frac{V}{RT} \frac{dP}{dt} \left( 1 - \frac{dT/T}{dP/P} \right). \quad (4.4)$$

On constate que cette méthode, comme il a été mentionné précédemment, nécessite d'avoir une excellente stabilité thermique, ce qui est assuré par deux systèmes de régulation. L'équation (4.4) peut s'écrire sous la forme

$$\dot{m} = \frac{V}{RT} \frac{\Delta P}{\Delta t} \left( 1 - \frac{\Delta T/T}{\Delta P/P} \right) = \frac{V}{RT} ac \quad (4.5)$$

où  $a = \Delta P/\Delta t$  est calculé à partir des relevés de pression linéarisés par la méthode des moindres carrés :

$$P_f(t) = at + b, \quad (4.6)$$

et  $c = 1 - \frac{\Delta T/T}{\Delta P/P}$  est l'incertitude due aux effets non isothermes. L'incertitude totale de la

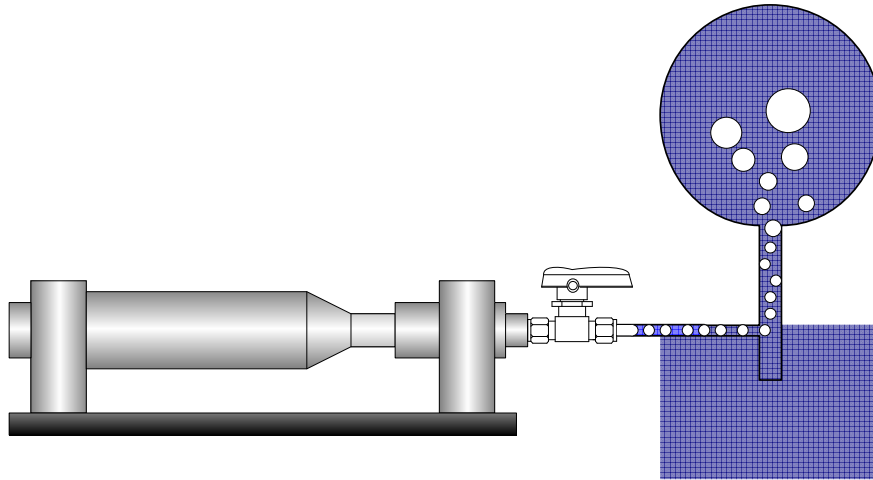
mesure de débit massique est donc donnée par :

$$\frac{\Delta \dot{m}}{\dot{m}} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta c}{c}. \quad (4.7)$$

Chacune des incertitudes intervenant dans cette équation est détaillée dans les paragraphes suivants.

- *1<sup>er</sup> terme, incertitude sur le volume des circuits A et B*

Le terme  $\frac{\Delta V}{V}$  est relatif à l'incertitude sur la mesure du volume des circuits A et B. Ces volumes ont été évalués en remplaçant le volume connu d'eau d'un ballon calibré par de l'air initialement contenu dans les circuits A ou B. Le volume A (ou B) est initialement pressurisé, puis connecté au ballon selon le montage de la Figure 4.6, qui permet de maintenir la pression  $P_{Ballon}$  à l'intérieur du ballon à un niveau constant (celui de la pression atmosphérique).



**Figure 4.7 :** Principe de mesure du volume des circuits à l'aide d'un ballon calibré

L'écoulement d'air s'effectue du volume A (ou B) vers le ballon jusqu'à ce que toute l'eau initiale (soit un volume  $V_{Ballon}$ ) soit évacuée. En supposant qu'il n'y a aucune fuite, le volume A (ou B) est alors déduit de la conservation de la masse de gaz transférée du volume A (ou B) vers le ballon. Ainsi, d'après la loi des gaz parfaits,

$$V_{A,B} = \frac{P_{Ballon} V_{Ballon}}{\Delta P_{A,B}} \quad (4.8)$$

où l'on note  $V_{A,B}$  le volume du circuit A ou B,  $\Delta P_{A,B}$  la baisse de pression dans ce circuit due au transfert de masse d'air en direction du ballon,  $V_{Ballon}$  le volume calibré du ballon incluant le volume de la connexion entre vanne et ballon, et  $P_{Ballon}$  la pression de l'air dans le ballon durant toute la phase de remplissage (pression atmosphérique dans ce cas).

L'incertitude sur la mesure de volume est alors

$$\frac{\Delta V_{A,B}}{V_{A,B}} = \frac{\Delta(\Delta P_{A,B})}{\Delta P_{A,B}} + \frac{\Delta P_{Ballon}}{P_{Ballon}} + \frac{\Delta V_{Ballon}}{V_{Ballon}} \quad (4.9)$$

Les premier et deuxième termes  $\frac{\Delta(\Delta P_{A,B})}{\Delta P_{A,B}}$  et  $\frac{\Delta P_{Ballon}}{P_{Ballon}}$  correspondent à l'incertitude sur les mesures de pression effectuées par des capteurs de type piézorésistif. L'incertitude maximale des deux capteurs est de  $\pm 0,5\%$  de la pleine échelle.

Le troisième terme  $\frac{\Delta V_{Ballon}}{V_{Ballon}}$  représente les incertitudes sur la mesure du volume de ballon. Le volume du ballon calibré a été mesuré par pesée d'eau. L'incertitude  $\frac{\Delta V_{Ballon}}{V_{Ballon}}$  incluant la prise en compte de la connectique est donc égale à  $\pm 0,3 \%$ .

L'incertitude totale sur la mesure de volume des circuits A ou B est inférieure à  $\pm (0,5\% + 0,5\% + 0,3\%) = \pm 1,3 \%$ .

L'incertitude par la méthode RSS est  $\sqrt{(0,5\%)^2 + (0,5\%)^2 + (0,3\%)^2} = 0,768\%$ .

- 2<sup>ème</sup> terme, incertitude sur la variation de la température

Le terme  $\frac{\Delta T}{T}$  est relatif aux incertitudes de mesure de température. Le fabricant des capteurs annonce une précision de mesure de  $\pm 0,2 \%$ . Le banc d'essai est placé dans une enceinte isolée thermostatée par 2 modules Peltier : la température relevée est homogène et l'écart de température mesuré entre les quatre capteurs est inférieur ou égal à la précision d'affichage, c'est-à-dire  $\pm 0,2 \%$ .

- 3<sup>ème</sup> terme, incertitude sur le coefficient  $a$  (pente de la courbe de pression)

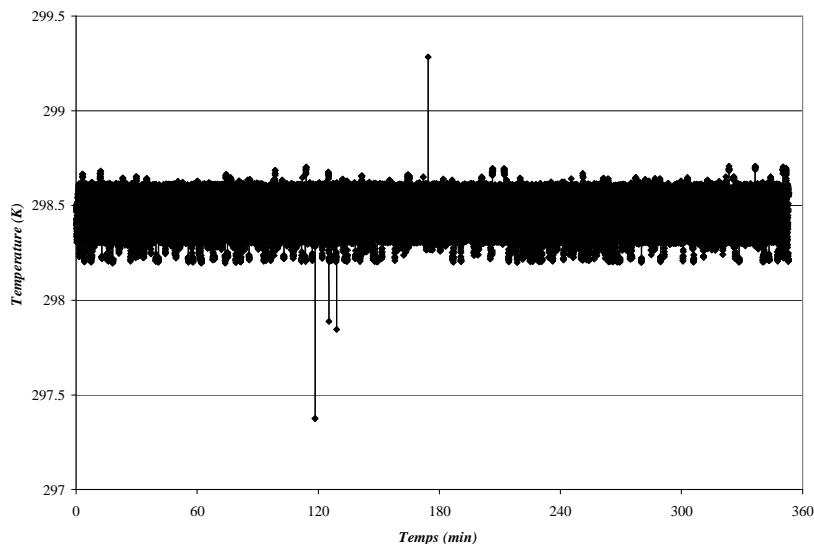
Le terme  $\frac{\Delta a}{a}$  représente l'incertitude sur le calcul du coefficient  $a$ . L'écart type sur ce coefficient est calculé par la méthode des moindres carrés, comme proposé par Ewart *et al.* [10][12] :

$$\Delta a = \left[ \frac{\left( n \sum_{i=1}^n (P_i - P_f(t_i))^2 \right)}{\left( (n-2) \left( n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n t_i \right)^2 \right) \right)} \right]^{1/2} \quad (4.10)$$

Plus de 1000 relevés de pression sont utilisés pour déterminer le coefficient  $a$  de l'équation (4.6). L'incertitude relative de la pente  $\frac{\Delta a}{a}$  tirée de l'équation (4.10) pour un nombre de points  $n > 1000$  est nettement inférieure à  $\pm 0,5 \%$ .

- 4<sup>ème</sup> terme, incertitude due aux effets non-isothermes

Le terme  $\frac{\Delta c}{c}$  est relatif à l'incertitude due aux effets non-isothermes. L'écart type de la température dans tous les cas de figure est de l'ordre de 0,1 K. La Figure 4.8 présente un relevé typique de la température au cours du temps, sur une durée de 6 heures environ. Sur cet exemple, la température moyenne est de 298,45 K avec un écart type de 0,116 K. La variation relative de température  $dT/T$  est donc de l'ordre de  $4 \times 10^{-4}$  tandis que la variation relative de pression  $dP/P$  vaut  $2 \times 10^{-2}$ . Ainsi,  $c = 1 - \frac{\Delta T/T}{\Delta P/P} = 1 \pm 2\%$  et l'incertitude relative  $\frac{\Delta c}{c}$  est alors inférieure à  $\pm 2\%$ . Remarquons que, pour s'assurer que les modules Peltier ne perturbent pas électroniquement le signal délivré par les capteurs de pression, des mesures de pression avec et sans module Peltier ont été effectuées. Le banc est composé de deux modules Peltier ; il est apparu que celui qui est proche des capteurs Inficon pouvait perturber le signal délivré par ces capteurs. Pour cette raison, durant la mesure de débit, seul le module Peltier proche du microcanal est maintenu en fonctionnement.



**Figure 4.8 :** Relevé typique de température sur une durée de 6 heures.

L'incertitude totale sur la mesure de débit massique obtenu par cette méthode est donc inférieure à  $\pm (1,3 + 0,2 + 0,5 + 2) \% = \pm 4 \%$ .

L'incertitude par la méthode RSS est

$$\sqrt{(0,768\%)^2 + (0,2\%)^2 + (0,5\%)^2 + (2\%)^2} = 2,21\% .$$

### 4.3. Acquisition et traitement des données

#### 4.3.1. Méthode DG

Cette méthode par déplacement de goutte liquide ne peut pas facilement être mise en œuvre pour des conditions opératoires nécessitant de trop faibles pressions. En effet, à basse pression, un dégazage se produit dans les parties du circuit situées à l'amont et à l'aval de la goutte et il en résulte un déplacement de celle-ci. Il devient alors impossible de remonter à la valeur nette du dégazage, car on ne peut quantifier la part de dégazage due au circuit à l'amont de la goutte de celle due au circuit à l'aval de celle-ci.

Dans les cas où l'on peut négliger le dégazage, la procédure est la suivante : les deux circuits sont remplis aux niveaux de pressions amont et aval souhaités en ouvrant toutes les vannes. Ensuite, pour isoler les deux circuits, les vannes V1A et V1B sont fermées. Pour commencer la mesure, les vannes V2A et V2B sont fermées pour permettre l'écoulement depuis le réservoir amont vers la pipette amont, puis à travers le microsystème et enfin vers la pipette aval et le réservoir aval. La vitesse moyenne de l'écoulement dans les pipettes amont et aval est mesurée par le suivi optique des deux gouttes. Les débits volumiques et massiques sont calculés à partir de ces vitesses moyennes.

La carte d'acquisition National Instrument<sup>TM</sup> enregistre numériquement en temps réel l'état de chaque capteur : (1) en l'état déclenché ou (0) en l'absence de déclenchement. Les pressions à l'amont et à l'aval et la température du microsystème sont également enregistrées. Toutes les données sont ensuite traitées dans Matlab. A l'aide de l'équation (4.3), le débit volumique de gaz traversant le microsystème est

déterminé à partir de la vitesse de la goutte déduite de l'état (0) ou (1) des capteurs optoélectroniques au cours du temps.

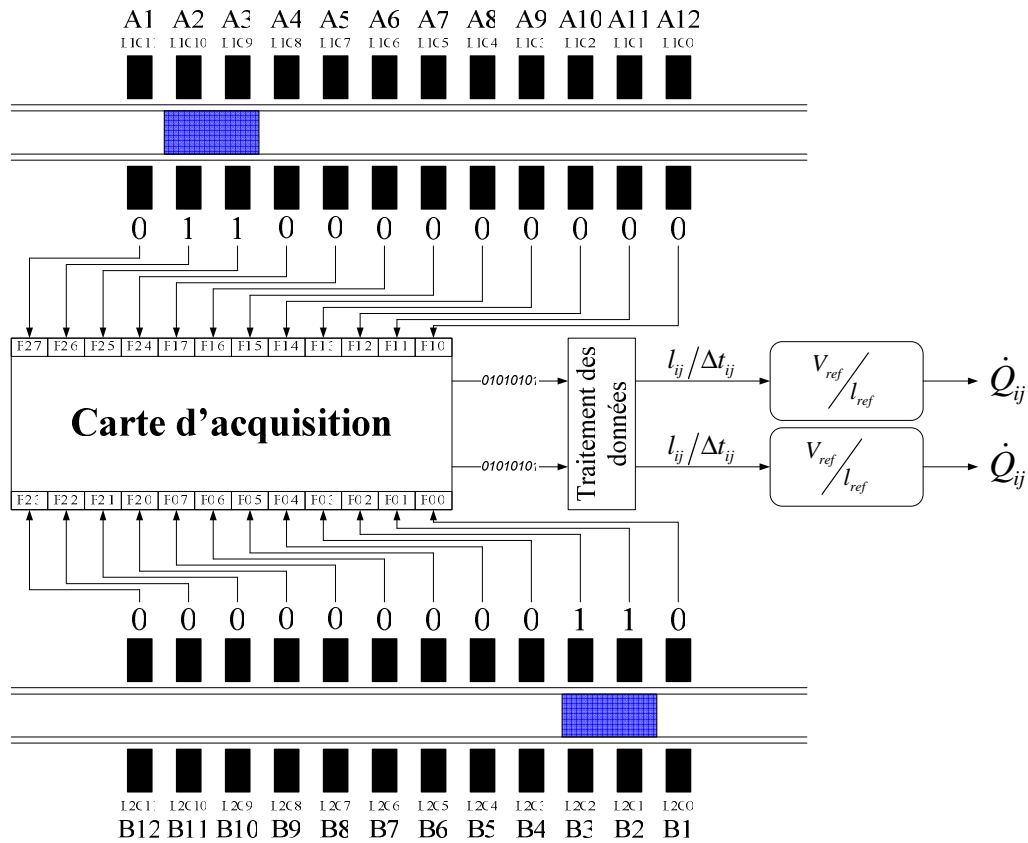


Figure 4.9 : Schéma représentatif de codage des signaux optoélectroniques et traitement des données pour la méthode DG

### 4.3.2. Méthode VC

Le mode opératoire de cette méthode de mesure à volume constant est le même que celui de la méthode précédente ; le principal avantage de la méthode VC par rapport à la méthode précédente DG est la possibilité d'emploi sur une plus large gamme de pression, notamment vers les basses pressions utilisées pour l'étude du régime de transition. Pour cela, le dégazage doit être évalué précisément. Il est alors nécessaire de réaliser deux étapes supplémentaires pour évaluer le niveau de dégazage associé aux deux circuits. La Figure 4.10 présente la séquence des différentes étapes de la mesure. Pour évaluer de niveau de dégazage à l'aval, par exemple ici le circuit B, les deux circuits sont

d'abord placés à la même pression (pression aval) pour éviter tout écoulement à travers le microsysteme pendant l'évaluation du dégazage. La remontée en pression due au dégazage du circuit B, incluant la connectique et le microsysteme, est alors mesurée en fermant la vanne V3A. Le circuit A est ensuite mis en pression (pression amont) pour se trouver dans les conditions opératoires. En ouvrant la vanne V3A, la mesure de débit traversant le microsysteme est alors effectuée.

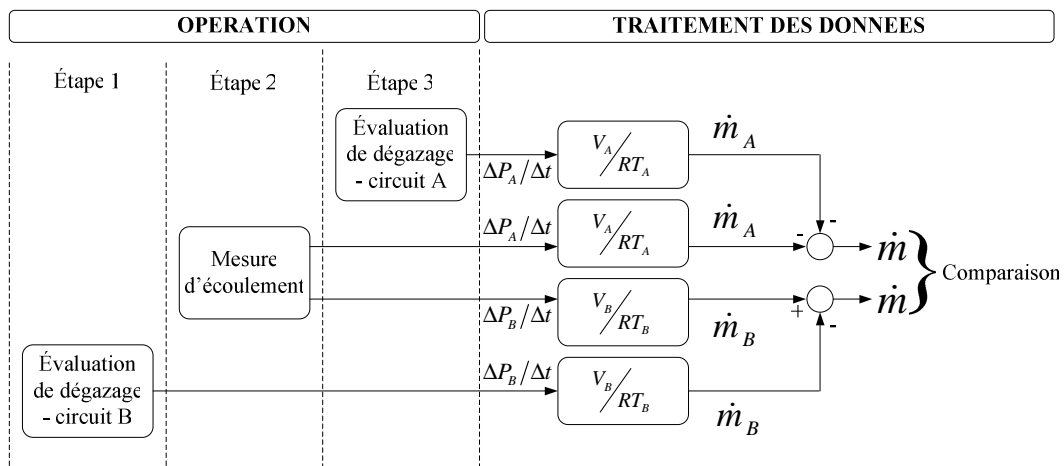


Figure 4.10 : Schéma représentatif de la procédure de mesure par la méthode VC en présence de dégazage.

La dernière étape est l'évaluation du dégazage dans le circuit amont. Pour la même raison que pour l'évaluation aval, les deux circuits sont d'abord mis à la même pression (pression amont) pour éviter l'écoulement au travers du microsysteme. La remontée en pression due au dégazage du circuit A, incluant la connectique et le microsysteme, est alors mesurée en fermant la vanne V3B.

Les mesures des pressions et des températures sont enregistrées avec la même carte d'acquisition que celle de la méthode DG. Les données sont également traitées dans Matlab et le débit massique est calculé en utilisant l'équation (4.3).

Un des avantages du banc d'essais est qu'il autorise la mise en œuvre de deux méthodes de mesure, à la fois à l'amont et à l'aval du microsysteme de test. Elles peuvent être lancées l'une après l'autre en manipulant simplement les vannes V2A et V2B.



Cependant, la contrepartie est l'amplification des phénomènes de dégazage à cause du volume important des réservoirs et de la complexité des parties internes du circuit. Le problème de dégazage apparaît dans les conditions de faible pression nécessaire à l'étude du régime de transition. Aussi, malheureusement, dans ces conditions opératoires, la méthode DG ne peut plus être employée ; seule la méthode VC permet d'évaluer précisément le dégazage. Pour cette raison, la plupart des expériences réalisées dans ce mémoire utilisent la méthode VC, notamment toutes celles effectuées dans le régime d'écoulement le plus raréfié.

### Références Bibliographiques

- [1] Sreekanth, A. K. (1969). "Slip flow in long circular tubes." *6th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics* L. Trilling and H. Y. Wachman. New-York, Academic Press, 667-680.
- [2] Arkilic, E. B. (1997). "Measurement of the Mass Flow and Tangential Momentum Accommodation Coefficient in Silicon Micromachined Channels," Thèse de Doctorat. Massachusetts Institute of Technology.
- [3] Jousten, K., Menzer, H., and Niepraschk, R. (2002). "A new fully automated gas flowmeter at the PTB for flow rate between  $10^{-13}$  mol/s and  $10^{-6}$  mol/s." *Metrologia*, 39(6), 519-529.
- [4] Harley, J. C., Huang, Y., Bau, H. H., and Zemel, J. N. (1995). "Gas flow in microchannels." *Journal of Fluid Mechanics*, 284, 257-274.
- [5] Pong, K., Ho, C., Liu, J., and Tai, Y. (1994). "Non-linear pressure distribution in uniform microchannels." in *Application of microfabrication to fluid mechanics*, P.R. Bandyopadhyay, K.S. Breuer, and C.J. Blechinger, ASME, New-York, 51-56.
- [6] Maurer, J., Tabeling, P., Joseph, P., and Willaime, H. (2003). "Second-order slip laws in microchannels for helium and nitrogen." *Physics of Fluids*, 15(9), 2613-2621.
- [7] Colin, S., Lalonde, P., and Caen, R. (2004). "Validation of a second-order slip flow model in rectangular microchannels." *Heat Transfer Engineering*, 25(3), 23-30.
- [8] Lalonde, P. (2001). "Etude expérimentale d'écoulements gazeux dans les micosystèmes à fluides," Thèse de Doctorat. Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse.

- [9] McCulloh, K. E., Tilford, C. R., Ehrlich, C. D., and Long, F. G. (1987). "Low-range flowmeters for use with vacuum and leak standards." *Journal of Vacuum Science and Technology A*, 5(3), 376-381.
- [10] Ewart, T., Perrier, P., and Graur, I. (2006). "Mass flow rate measurements in gas micro flow." *Experiments in Fluids*, 41(3), 487-498.
- [11] Arkilic, E. B., Breuer, K. S., and Schmidt, M. A. (2001). "Mass flow and tangential momentum accommodation in silicon micromachined channels." *Journal of Fluid Mechanics*, 437, 29-43.
- [12] Ewart, T. (2007). "Etude des écoulements gazeux isothermes en microconduit : du régime hydrodynamique au proche régime moléculaire libre," Thèse de Doctorat. Ecole Polytechnique Universitaire de Marseille, Université de Provence, Marseille.

## Chapitre 5

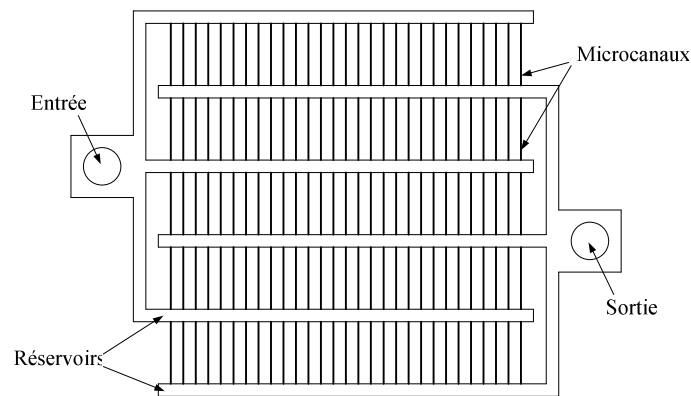
# Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux de section rectangulaire

Le chapitre précédent a présenté la conception et la mise en œuvre d'un nouveau banc d'essais pour la mesure de microdébits gazeux, plus performant que le banc précédemment développé au LGMT dans le travail de thèse de Lalonde [1], car permettant de couvrir une plage de Knudsen plus étendue. Nous présentons dans le présent chapitre les résultats expérimentaux obtenus au sein de microcanaux de section rectangulaire, qui demeure la section la plus courante dans les microsystèmes fluidiques. Les hypothèses d'écoulement plan ne sont plus valables pour ce type de géométrie, dès que le rapport de forme de la section est supérieur à 1 %. Les modèles introduits dans le chapitre 3 sont précisés dans la partie 5.2 et utilisés pour discuter des résultats expérimentaux. Les écoulements de gaz simples et de mélanges de deux gaz monoatomiques, argon et hélium, sont analysés dans les paragraphes 5.3 et 5.4 respectivement. Le chapitre commence par une présentation des caractéristiques géométriques des microcanaux de test.

### 5.1. Microcanaux testés

Les microsystèmes utilisés consistent en des séries de microcanaux cylindriques de section rectangulaire. Ils ont été gravés sur des plaquettes de silicium de diamètre 4

pouces et recouverts par des plaquettes de Pyrex de diamètre 3 pouces par une méthode de collage anodique. Les microcanaux sont été obtenus par gravure sèche de type DRIE (Deep Reactive Ion Etching) : le wafer de silicium est exposé à un plasma d'ions réactifs pour arracher les atomes de silicium. Les surfaces non protégées par le masque sont ainsi gravées par le plasma. Ce masque est dessiné aux dimensions des microcanaux et des réservoirs. La gravure se fait perpendiculairement à la surface du wafer, d'où des sections de microcanaux rectangulaires [1]. La paroi de Pyrex et les trois parois de silicium sont donc de nature différente, et le coefficient d'accommodation que nous cherchons à déterminer est la moyenne sur ces quatre parois. Notons que la rugosité des flancs verticaux en silicium est sensiblement différente de la rugosité du fond des canaux. La Figure 5.1 présente la disposition des microcanaux et des réservoirs de distribution.



*Figure 5.1* : Disposition des microcanaux et des réservoirs.

Les caractéristiques des microsystèmes sont présentées dans le Tableau 5.1, ils comportent 1, 45, 380 ou 575 canaux parallèles. Les microcanaux sont connectés à l'amont et à l'aval à des réservoirs très profonds (environ 300  $\mu\text{m}$ ). La section de chaque microcanal est définie par  $-W/2 \leq x \leq W/2$  et  $-H/2 \leq y \leq H/2$ .

La profondeur et la rugosité des microcanaux ont été mesurées grâce à un profilomètre TENCOR P1. Les mesures de largeur ont été effectuées au moyen d'un microscope optique. La longueur des microcanaux, qui correspond à l'écartement des réservoirs est directement déduite des cotes du masque de gravure, connues avec une

incertitude estimée à environ 10  $\mu\text{m}$ . Les détails de mesure sont présentés dans la thèse de Lalonde [1].

Echantillon	Profondeur mesurée – corrigée, $H$ ( $\mu\text{m}$ )	Largeur, $l$ ( $\mu\text{m}$ )	Longueur, $L$ ( $\mu\text{m}$ )	Nombre de microcanaux parallèles
M1	4,48 – 4,48	51,6	5000	1
M2	1,84 – 1,88	21,2	5000	45
M3	1,15 – 1,155	21,0	5000	380
M4	0,54 – 0,545	50,0	5000	575
Incertitude	0,10 – 0,01	0,3	10	

**Tableau 5.1** : Caractéristiques des microsystèmes.

L'incertitude relative sur la profondeur étant assez élevée, la valeur retenue a été ajustée après une comparaison entre mesures de débit massique et simulation en régime hydrodynamique, pour lequel les modèles sont précis et indépendants d'un coefficient d'accommodation. Ainsi, par exemple pour le microcanal M2, la profondeur mesurée  $1,84 \pm 0,10 \mu\text{m}$  a été corrigée à  $1,88 \mu\text{m}$  et son incertitude est finalement estimée à  $\pm 0,01 \mu\text{m}$ . La validation de cette technique est détaillée dans [1]. Enfin, la rugosité typique mesurée au fond des canaux avec le profilomètre est estimée entre 50 et 80 Å.

Les mesures présentées dans ce chapitre sont toutes relatives à l'échantillon M2 (voir Tableau 5.1), avec pour objectif de comparer les écoulements de différents gaz (He, Ar et mélanges binaires à différentes concentrations de ces deux gaz monoatomiques) à différents niveaux de raréfaction dans un même microcanal. L'analyse des écoulements dans les échantillons M1, M3 et M4 fera l'objet de travaux futurs.

## 5.2. Modèles théoriques utilisés

Dans tout ce chapitre, le libre parcours moyen des molécules est calculé selon le modèle de Maxwell :

$$\lambda_M = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu}{\rho \sqrt{RT}} \quad (5.1)$$

et tous les calculs ont été effectués à partir d'un nombre de Knudsen construit sur la profondeur du microcanal

$$Kn' = \lambda/L_{\min} = \lambda/2h, \quad (5.2)$$

ou sur le paramètre de raréfaction associé :

$$\delta' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{Kn'}, \quad (5.3)$$

En revanche, tous les résultats sont finalement présentés en fonction du nombre de Knudsen défini à partir du diamètre hydraulique de la section du microcanal :

$$Kn = \lambda/D_H = \lambda/4h \quad (5.4)$$

ou en fonction du paramètre de raréfaction

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{Kn}, \quad (5.5)$$

également basé sur ce diamètre hydraulique. Notons que les simulations numériques du modèle cinétique basé sur l'équation de Boltzmann linéarisée associée au modèle BGK (noté par la suite BGK linéarisé, voir paragraphe 5.2.1) peuvent être menées à partir de  $\delta$  ou de  $\delta'$ . Nous avons vérifié que les débits dimensionnels obtenus étaient identiques.

Les données expérimentales sont confrontées à différents modèles théoriques, précisés ci-dessous.

### 5.2.1. Pour les gaz simples – modèles continus

On considère d'abord les modèles continus glissants à l'ordre 1 basés sur les conditions aux limites de Maxwell

$$u_{glis.}|_{paroi} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \lambda \frac{\partial u}{\partial n}|_{paroi} \quad (5.6)$$

ou de Cercignani

$$u_{glis.}|_{paroi} = 1,1466 \frac{2-\alpha}{\alpha} \lambda \frac{\partial u}{\partial n}|_{paroi} \quad (5.7)$$

et les modèles continus glissants à l'ordre 2 basés sur les conditions aux limites de Deissler

$$u_{glis.}|_{paroi} = \frac{2-\alpha}{\alpha} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{paroi} - \frac{9}{8} \lambda^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{paroi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{paroi} \right] \quad (5.8)$$

ou sur des conditions que nous avons modifiées en nous inspirant de la correction d'Hadjiconstantinou (voir équation (2.22)), sous la forme :

$$u_{glis.}|_{paroi} = 1,1466 \frac{2-\alpha}{\alpha} \lambda \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{paroi} - 0,647 \lambda^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \Big|_{paroi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{paroi} \right]. \quad (5.9)$$

Le débit est alors calculé selon la procédure détaillée dans l'article d'Aubert et Colin [2], prenant en compte l'aspect tridimensionnel de l'écoulement. Ce débit a été calculé de deux manières différentes :

1. D'une part à l'aide de l'équation (2.50) en considérant un gradient de pression moyen  $dp/dz^* = (P_i - P_o)$  et un nombre de Knudsen  $Kn_0' = \lambda_0 / (2h)$  basé sur un libre parcours moyen défini à la pression moyenne  $(P_i + P_o) / 2$ . Les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  de l'équation (2.50) valant respectivement, selon que l'on considère les conditions aux limites de Maxwell ( $M$ ), de Cercignani ( $C$ ), de Deissler ( $D$ ) ou modifiées ( $m$ ) :

$$C_{1(M)} = \frac{2-\alpha}{\alpha}; C_{2(M)} = 0 \quad (5.10)$$

$$C_{1(C)} = 1,1466 \frac{2-\alpha}{\alpha}; C_{2(C)} = 0 \quad (5.11)$$

$$C_{1(D)} = \frac{2-\alpha}{\alpha}; C_{2(D)} = \frac{9}{8} \quad (5.12)$$

$$C_{1(m)} = 1,1466 \frac{2-\alpha}{\alpha}; C_{2(m)} = 0,647. \quad (5.13)$$

Les débits calculés par ces différents modèles sont analysés dans la partie 5.3.2, et notés respectivement sur les figures : « **Modèle continu moyenné : CL Maxwell ordre 1** », « **Modèle continu moyenné : CL Cercignani ordre 1** », « **Modèle continu moyenné : CL Deissler ordre 2** » et « **Modèle continu moyenné : CL modifiées ordre 2** ».

2. D'autre part suite à une intégration le long du canal qui prend en compte la valeur locale exacte du nombre de Knudsen dans chaque section

$$\dot{m} = -\frac{4h^4}{a^* \mu L} \frac{P_o^2}{RT} \left( \frac{a_1 (\Pi^2 - 1)}{2} + a_2 Kn_o (\Pi - 1) + a_3 Kn_o^2 \ln \Pi \right) \quad (5.14)$$

où  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  dépendent des coefficients de glissement des équations (5.8) ou (5.9) et du rapport de forme  $a = 0,089$  de la section. Ainsi, pour le modèle basé sur l'équation de Deissler, on a pour un coefficient d'accommodation  $\alpha = 0,9$  :

$$a_{1(D)} = 0,3147 ; a_{2(D,\alpha=0,9)} = 2,3954 ; a_{3(D,\alpha=0,9)} = 4,1352 \quad (5.15)$$

et pour un coefficient d'accommodation  $\alpha = 1$  :

$$a_{1(D)} = 0,3147 ; a_{2(D,\alpha=1)} = 1,9819 ; a_{3(D,\alpha=1)} = 4,1344 \quad (5.16)$$

Dans le cas de l'équation modifiée (5.9), ces coefficients ont pour valeur dans le cas d'une accommodation parfaite :

$$a_{1(m)} = 0,3134 ; a_{2(m,\alpha=1)} = 2,2139 ; a_{3(m,\alpha=1)} = 2,4212 \quad (5.17)$$

Les débits calculés par ces différents modèles sont analysés dans la partie 5.3.3, et notés respectivement sur les figures : « **Modèle continu : CL Maxwell ordre 1** », « **Modèle continu : CL Cercignani ordre 1** », « **Modèle continu : CL Deissler ordre 2** » et « **Modèle continu : CL modifiées ordre 2** ».

### 5.2.2. Pour les gaz simples – modèles cinétiques

De la même façon, nous avons tout d'abord appliqué le modèle cinétique basé sur l'équation de Boltzmann linéarisée associée à un modèle BGK pour le terme de collision, qui débouche sur une expression du débit de la forme

$$\dot{m} = G' \frac{H(HB)}{\xi} \frac{\Delta P}{L}, \quad (5.18)$$

équation dans laquelle  $G'$ , adimensionné par la profondeur  $H = 2h$  du microcanal, a été calculé pour un paramètre de raréfaction  $\delta_0' = \sqrt{\pi}h/\lambda_0$  basé sur un libre parcours moyen



défini à la pression moyenne  $(P_i + P_o)/2$ . L'autre possibilité pour parvenir au même résultat consiste à utiliser l'équation

$$\dot{m} = G \frac{D_H (H B)}{\xi} \frac{\Delta P}{L}, \quad (5.19)$$

équation dans laquelle  $G$ , adimensionné par le diamètre hydraulique  $D_H$  du microcanal, a été calculé pour un paramètre de raréfaction  $\delta_0 = \sqrt{\pi} D_H / (2\lambda_0)$  également basé sur un libre parcours moyen défini à la pression moyenne  $(P_i + P_o)/2$  :

$$G = G(\delta_0). \quad (5.20)$$

Les débits calculés par l'équation (5.18) ou (5.19) associée à l'équation (5.20) sont analysés dans la partie 5.3.2, et notés sur les figures : « **Modèle cinétique moyenné : BGK linéarisé** ».

Par la suite, dans la partie 5.3.3., nous comparons le débit calculé par cette méthode au débit calculé par une autre technique qui consiste à évaluer  $G$  par l'équation :

$$G = \frac{1}{\delta_o - \delta_i} \int_{\delta_i}^{\delta_o} G(\delta) d\delta, \quad (5.21)$$

Cette équation donne une valeur moyenne de  $G$  différente de la précédente, mais le calcul de  $\dot{m}$  qui en résulte n'est en toute rigueur exact que si le gradient de pression est constant le long de l'axe, ce qui n'est pas totalement le cas, du fait des effets conjugués de compressibilité et de raréfaction. En pratique, on discrétise l'équation (5.21) sur  $n$  intervalles. Les débits calculés par l'équation (5.18) ou (5.19) associée à l'équation (5.21) sont analysés dans la partie 5.3.4, et notés sur les figures : « **Modèle cinétique intégré : BGK linéarisé** ». On analyse en particulier l'influence du nombre  $n$  d'intervalles de discrétisation sur le débit calculé.

Enfin, Pour calculer le débit massique de gaz simple dans cette thèse par la méthode DVM, les vitesses moléculaires sont discrétisées dans un système de coordonnées polaires en 64 vitesses et 100 angles par quadrant. Le maillage de microcanal comporte 50 x 50 mailles.

### 5.2.3. Pour les mélanges binaires – modèles continus

Dans le cas de mélanges binaires d'hélium et d'argon, on s'intéresse essentiellement aux modèles d'ordre 2 de Deissler et modifié, utilisés de la même manière que pour les gaz simples. Dans ce cas, le mélange est considéré comme un gaz simple parfait, mais avec une viscosité  $\mu$  interpolée à partir des mesures expérimentales de Kalelkar et Kestin [3] et avec un coefficient spécifique  $R$  calculé par

$$R = \frac{\mathcal{R}}{C_{He}M_{He} + C_{Ar}M_{Ar}}, \quad (5.22)$$

où  $\mathcal{R} = 8,315 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  est la constante des gaz parfaits,  $C_{He}$  représente la fraction d'hélium dans le mélange et  $C_{Ar} = 1 - C_{He}$  la fraction d'argon,  $M_{He}$  et  $M_{Ar}$  étant respectivement les masses molaires de l'hélium et de l'argon. Les équations (5.8) à (5.17) sont par ailleurs inchangées.

### 5.2.4. Pour les mélanges binaires – modèles cinétiques

Le débit massique est alors calculé par un modèle cinétique basé sur l'équation de Boltzmann linéarisée associée à un modèle de McCormack pour le terme de collision :

$$\dot{m} = [G'_{PP} + G'_{BD}] \frac{H(HB)}{\xi} \frac{\Delta P}{L}. \quad (5.23)$$

Ce débit fait intervenir deux termes, l'un dû à l'écoulement de Poiseuille et l'autre à la barodiffusion (voir chapitre 3). De la même manière que pour les gaz simples,  $G'_{PP}$  et  $G'_{BD}$ , adimensionnés par la profondeur  $H = 2h$  du microcanal, ont été calculés pour un paramètre de raréfaction  $\delta_0' = \sqrt{\pi}h/\lambda_0$  basé sur un libre parcours moyen défini à la pression moyenne  $(P_i + P_o)/2$ . Les débits calculés par l'équation (5.23) sont analysés dans la partie 5.4.2. et notés sur les figures : « **Modèle cinétique moyenné : McCormack linéarisé** ».

L'autre moyen de calculer le coefficient  $(G'_{PP} + G'_{BD})$ , sous la forme  $G'_{PP} + G'_{BD} = \frac{1}{\delta_o - \delta_i} \int_{\delta_i}^{\delta_o} [G'_{PP} + G'_{BD}](\delta) d\delta$ , est évalué dans la partie 5.4.3. Il est repéré sur les figures par : « **Modèle cinétique intégré : McCormack linéarisé** ».

Enfin, pour calculer le débit massique des mélanges gazeux dans cette thèse par la méthode DVM, le modèle de sphère rigide est utilisé. Les vitesses moléculaires sont discrétisées dans un système de coordonnées polaires en 64 vitesses et 40 angles par quadrant. Le maillage de microcanal comporte 100 x 100 mailles.

### 5.3. Écoulements de gaz monoatomiques

#### 5.3.1. Mesures expérimentales

Les mesures effectuées dans cette partie ont été réalisées avec deux gaz simples : l'argon et l'hélium. La gamme des nombres de Knudsen couverte va de 0,02 à 1,5 ( $44 \geq \delta_0 \geq 0.6$ ) et permet d'accéder aux régimes de glissement et de transition. L'ensemble des résultats pour chaque gaz est séparé en trois séries qui correspondent aux trois pressions aval  $P_B$  : 50 kPa, 15 kPa et 2 kPa. Les nombres de Knudsen moyens de chaque série sont contrôlés par la pression amont, notée  $P_A$  ; les rapports de pression, notés  $\Pi = P_A / P_B$  vont de 1,6 à 7.

Les résultats expérimentaux obtenus avec les deux gaz sont reportés dans le Tableau 5.2. Le rapport de pression  $\Pi$ , les pressions amont  $P_A$  et aval  $P_B$  et les débits massiques amont  $\dot{m}_A$  et aval  $\dot{m}_B$  y sont présentés. D'un point de mesure à un autre, les conditions de pression aval  $P_B$  peuvent légèrement varier autour des 3 valeurs indiquées précédemment. Le nombre de Knudsen moyen et le paramètre de raréfaction moyen sont calculés pour chaque mesure à partir de la pression moyenne amont et aval, les caractéristiques du gaz et la dimension du microcanal. Les résultats des mesures permettent de vérifier la conservation du débit  $\dot{m}_A \approx \dot{m}_B$ .

Dans des conditions de pression identiques, le débit massique de l'argon est plus grand que celui de l'hélium, essentiellement du fait d'une masse molaire 10 fois plus grande pour l'argon. De même, le nombre de Knudsen du gaz plus léger (He) est plus grand que celui du gaz plus lourd (Ar).

Toutes les mesures présentées ont été effectuées à une même température constante  $T = 25 \pm 0,5 \text{ }^\circ\text{C}$ . A cette température, la viscosité de l'argon est d'après la loi de Sutherland :

$$\mu_{Ar} = 2,286 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (5.24)$$

et celle de l'hélium est

$$\mu_{He} = 1,985 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}. \quad (5.25)$$

ARGON						HELIUM					
$Kn$	$\Pi$	$P_A$	$P_B$	$\dot{m}_A$	$\dot{m}_B$	$Kn$	$\Pi$	$P_A$	$P_B$	$\dot{m}_A$	$\dot{m}_B$
		Pa		$\text{kg s}^{-1}$				Pa		$\text{kg s}^{-1}$	
3,2E-02	1,60	80124	50158	4,28E-12	4,39E-12	8,8E-02	1,58	79150	50210	8,00E-13	7,37E-13
3,0E-02	1,79	89862	49828	6,09E-12	6,19E-12	8,1E-02	1,72	88440	51300	1,06E-12	9,68E-13
2,8E-02	1,98	99288	50169	7,80E-12	7,88E-12	7,6E-02	1,95	98760	50540	1,38E-12	1,31E-12
2,4E-02	2,50	125056	49927	1,37E-11	1,34E-11	6,5E-02	2,42	123610	50990	2,26E-12	2,13E-12
2,1E-02	2,99	149687	50074	1,95E-11	1,97E-11	5,7E-02	2,90	148460	51190	3,26E-12	3,09E-12
6,8E-02	3,06	45922	15009	2,82E-12	3,01E-12	1,9E-01	3,03	45515	15000	6,85E-13	6,61E-13
5,5E-02	4,06	60819	14998	4,80E-12	4,88E-12	1,5E-01	4,00	60051	14996	1,04E-12	1,02E-12
4,6E-02	5,06	75835	14998	7,23E-12	7,11E-12	1,3E-01	5,01	75123	15006	1,49E-12	1,44E-12
3,9E-02	6,01	90105	14996	9,66E-12	9,73E-12	1,1E-01	6,01	90169	14999	1,93E-12	1,89E-12
3,4E-02	7,00	104925	14998	1,24E-11	1,26E-11	9,5E-02	6,94	104097	14992	2,45E-12	2,34E-12
5,0E-01	3,10	6198	2002	2,66E-13	2,55E-13	1,4E+00	3,12	6020	1928	7,78E-14	7,82E-14
4,2E-01	4,02	7879	1962	3,59E-13	3,49E-13	1,1E+00	3,92	7870	2008	1,14E-13	1,09E-13
3,5E-01	4,79	9754	2036	4,84E-13	4,77E-13	9,4E-01	4,97	10015	2015	1,53E-13	1,52E-13
3,0E-01	5,96	11857	1990	6,06E-13	6,05E-13	8,4E-01	5,83	11576	1985	1,87E-13	1,84E-13
2,6E-01	6,61	13569	2052	7,47E-13	7,18E-13	7,3E-01	6,81	13489	1982	2,16E-13	2,20E-13

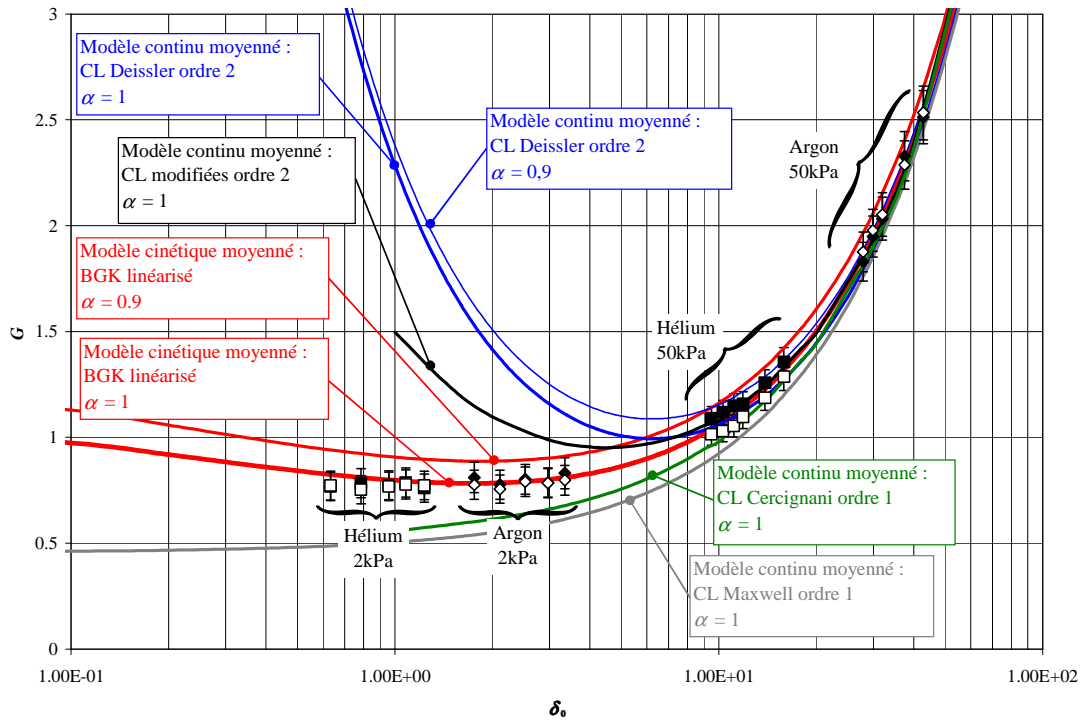
**Tableau 5.2** : Conditions et résultats expérimentaux ( $T = 298,15 \text{ K}$ )

rapport de pression  $\Pi$ , pressions amont  $P_A$  et aval  $P_B$  et débits massiques amont  $\dot{m}_A$  et aval  $\dot{m}_B$ .

### 5.3.2. Comparaison des données expérimentales avec les modèles moyennés

La Figure 5.2 présente une comparaison entre résultats expérimentaux obtenus avec l'hélium et l'argon et résultats des modèles cinétiques. Le débit  $G$  adimensionnalisé selon l'équation (5.19) est représenté en fonction du paramètre de raréfaction. Pour ne

pas alourdir davantage cette figure, seules sont représentées quatre séries de résultats expérimentaux correspondant aux pressions 50 kPa et 2 kPa. Les résultats obtenus avec l'argon et l'hélium sont représentés par des losanges et des rectangles respectivement. L'incertitude expérimentale sur  $G$ , déduite de l'incertitude de la mesure de débit massique  $\dot{m}$ , est représentée par une barre d'erreur verticale.



**Figure 5.2 :** Débit adimensionnel en fonction du facteur de raréfaction. Comparaison entre :  
 résultats expérimentaux à l'entrée (■) et à la sortie (□) pour l'hélium,  
 résultats expérimentaux à l'entrée (◆) et à la sortie (◇) pour l'argon  
 et résultats des modèles cinétiques et continus à  $T = 298.15 \text{ K}$

Les résultats des modèles continus et des modèles cinétiques pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 0.9$  sont représentés sur cette figure. Ils sont calculés à partir des hypothèses d'écoulement localement pleinement développé au sein de microcanaux de section rectangulaire. Le coefficient d'accommodation tangentielle peut être déduit de la comparaison des résultats de mesures avec les modèles. Les résultats présentés sur la Figure 5.2 couvrent l'ensemble des régimes d'écoulement testés. La figure montre que les points de données expérimentales sont en excellent accord avec la courbe des résultats du

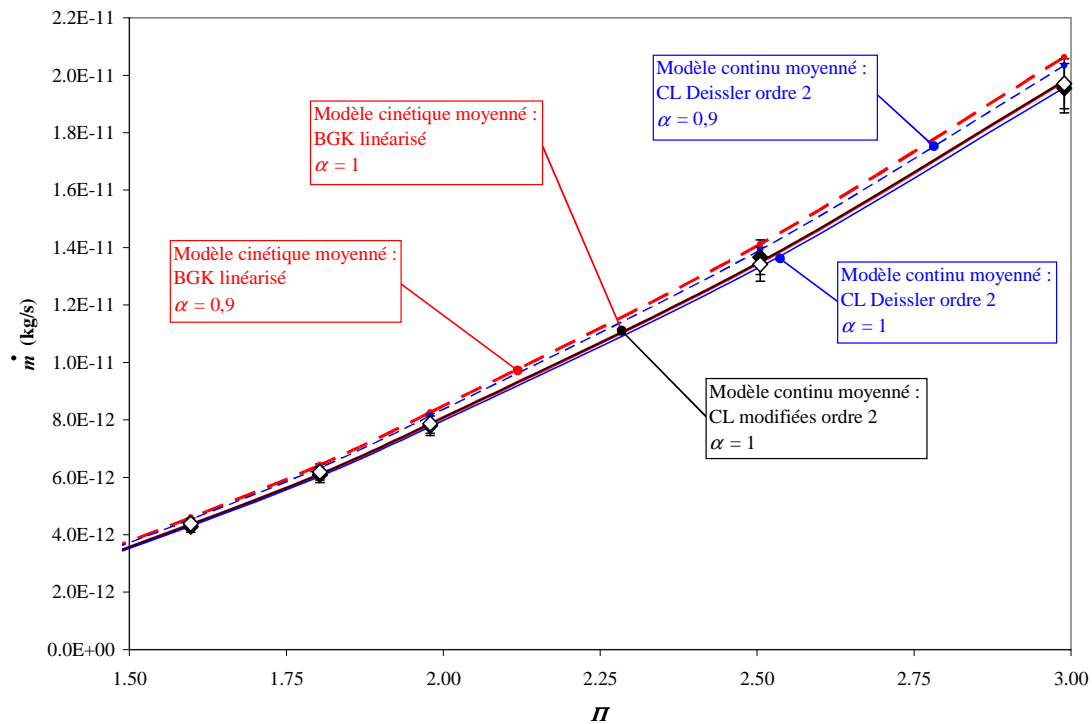
modèle BGK linéarisé pour  $\alpha = 1$  dans toute la gamme du paramètre de raréfaction. Par cette comparaison, on peut déduire que les interactions entre les parois et les deux gaz donnent lieu à une réflexion diffuse avec accommodation parfaite. Comme nous l'avons déjà évoqué au paragraphe précédent, le microcanal est composé de trois parois en silicium et d'une paroi en Pyrex, le coefficient d'accommodation  $\alpha$  rend donc compte d'une moyenne des interactions pour ces deux types de paroi avec le gaz testé. Lalonde [1] a trouvé  $\alpha \approx 0,93$  pour ces mêmes microcanaux en comparant les résultats expérimentaux par la méthode de suivi de goutte liquide au modèle de Deissler. Ces résultats sont en accord avec ceux trouvés dans notre travail. En effet, le modèle de Deissler et les autres modèles basés sur l'approche continue sont excellents pour  $\delta \geq 20$  et acceptables jusqu'à  $\delta \approx 10$  pour les modèles d'ordre 2. Les résultats des modèles de l'approche continue s'écartent progressivement des résultats expérimentaux quand le paramètre de raréfaction  $\delta$  diminue. Les modèles d'ordre 1 sous-estiment la valeur de débit adimensionnel  $G$ , tandis que les modèles d'ordre 2 le surestiment.

La Figure 5.2 présente les débits mesurés et simulés sous une forme adimensionnelle similaire à celle utilisée par Ewart *et al.* [4], qui ont étudié l'écoulement d'hélium dans des microcanaux de section rectangulaire, mais de faible rapport de forme  $a = 0,019$ , ce qui donne des écoulements proches d'écoulements plans entre plaques parallèles. Ce n'est pas le cas pour notre étude, puisque  $a = 0,089$  et dans ce cas, le caractère tridimensionnel de l'écoulement est loin d'être négligeable. Ainsi, une comparaison quantitative n'est pas possible, mais des tendances identiques sont observées. La plage du paramètre de raréfaction couverte par nos essais est  $\delta_0 \in [0,6;45]$ , tandis qu'elle vaut  $\delta_0 \in [0,03;20]$  dans l'étude d'Ewart *et al.* [4].

Les résultats du Tableau 5.2 sont analysés plus précisément sur les figures suivantes (Figure 5.3 à Figure 5.8) pour lesquelles le débit massique  $\dot{m}$  est représenté en fonction du rapport de pression  $\Pi$ . Ces figures présentent les résultats du modèle utilisant les conditions aux limites de Deissler appliquées sur une section rectangulaire (équation (2.50) associée aux conditions aux limites (5.12)), ceux du modèle modifié basé sur les conditions aux limites (5.13), et ceux du modèle cinétique moyenné BGK

linéarisé. Pour les figures présentant les résultats dans les régimes les plus raréfiés, seul le modèle cinétique est valable et les autres modèles ne se sont donc pas représentés.

Remarquons que la légère irrégularité des résultats présentés sur les figures est due au fait que la condition de pression aval  $P_B$  varie légèrement d'une mesure à l'autre.

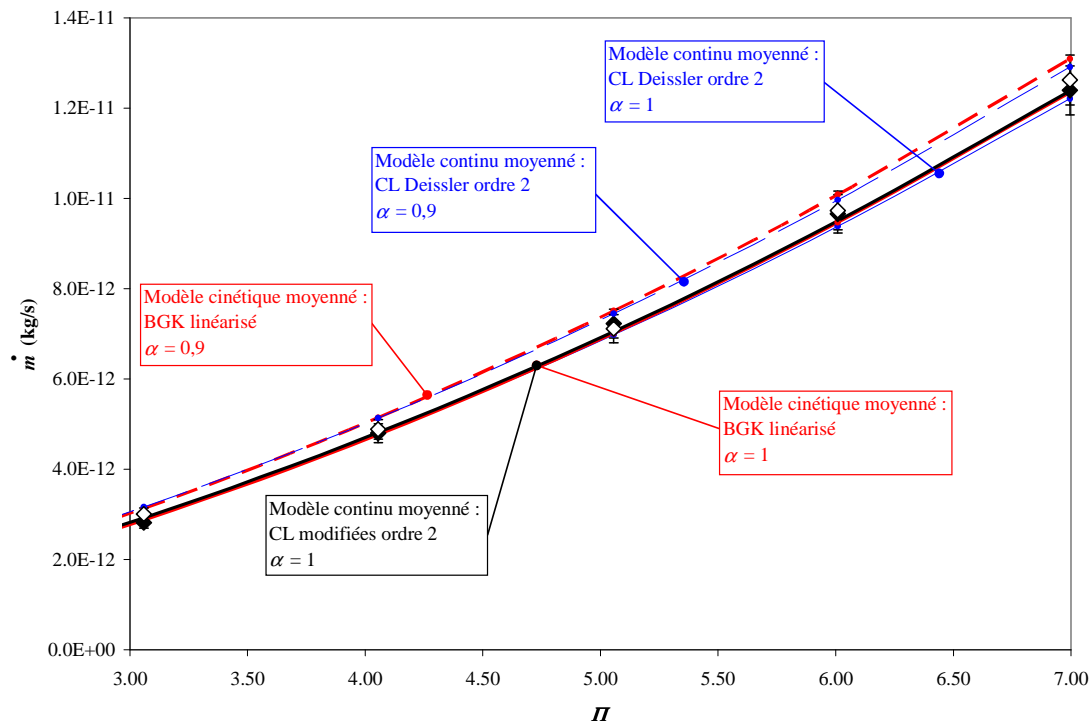


**Figure 5.3 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour l'argon : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée ( $\blacklozenge$ ) et à la sortie ( $\diamond$ ) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15 \text{ K}$ ,

$$P_B \approx 5 \times 10^4 \text{ Pa}, \quad 0,021 < Kn_0 < 0,032, \quad 27,9 < \delta_0 < 42,8.$$

La Figure 5.3 est relative à un écoulement d'argon avec une pression aval fixée à environ 50 kPa. La pression à l'amont est adaptée afin d'obtenir un rapport de pression allant de 1,6 à 3. Le nombre de Knudsen et le paramètre de raréfaction moyens sont tels que  $0,021 < Kn_0 < 0,032$  et que  $27,9 < \delta_0 < 42,8$ . L'écoulement se trouve dans le régime de glissement pour lequel les modèles continus sont encore valables. Les différents modèles théoriques donnent des résultats très proches et permettent de valider nos expériences. Les trois modèles sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux pour un coefficient d'accommodation  $\alpha = 1$ . L'influence du terme du

second ordre dans les modèles continus est peu sensible dans ce régime légèrement raréfié. Ainsi les écarts entre modèle de Deissler et modèle modifié sont très faibles. Dans ce régime, les modèles continus gardent tout leur intérêt car leur mise en œuvre est plus simple et demande moins de temps de calcul que le modèle BGK linéarisé.

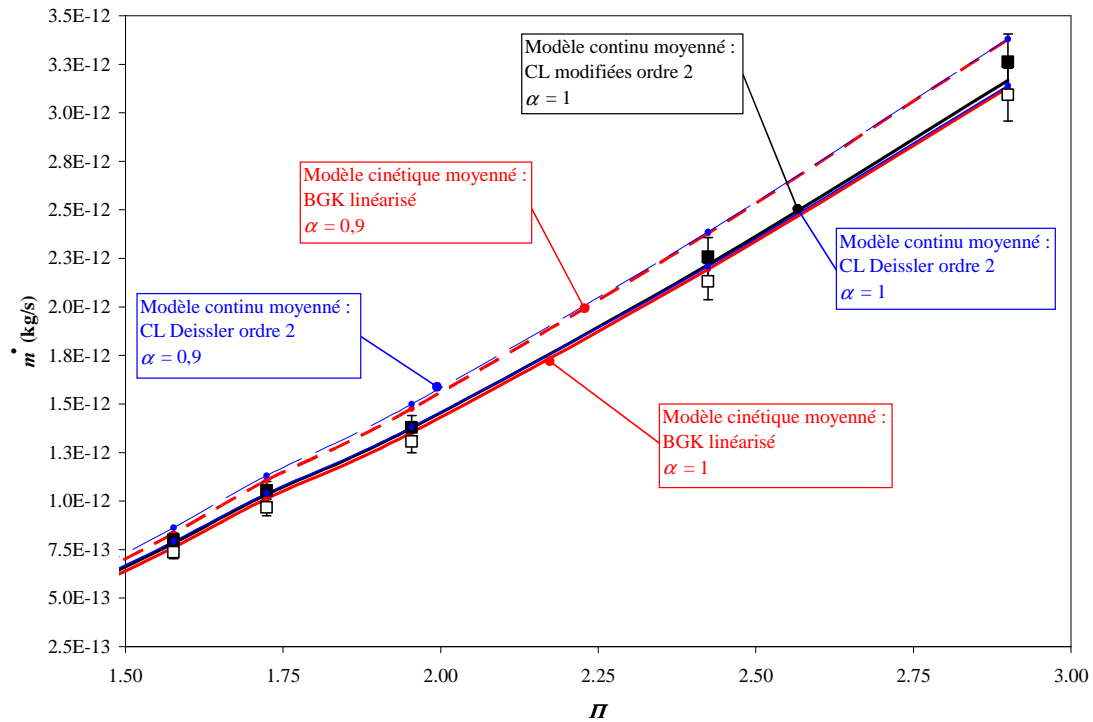


**Figure 5.4 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour l'argon : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (♦) et à la sortie (◇) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15\text{ K}$ ,

$$P_B \approx 1,5 \times 10^4 \text{ Pa}, \quad 0,034 < Kn_0 < 0,068, \quad 13,05 < \delta_0 < 25,69.$$

Afin d'augmenter la raréfaction des écoulements, la série d'essais suivante a été réalisée avec une pression aval d'environ  $1,5 \times 10^4 \text{ Pa}$  (Figure 5.4). Pour effectuer l'expérience sur un laps de temps raisonnable, le rapport de pressions  $\Pi$  varie de 3 à 7. Le nombre de Knudsen moyen et le paramètre de raréfaction moyen sont tels que  $0,034 < Kn_0 < 0,068$  et  $13,05 < \delta_0 < 25,69$ . Comme précédemment, l'écoulement est encore dans le régime de glissement et les modèles continus restent précis. Les résultats des trois modèles sont toujours en accord avec les résultats expérimentaux pour une valeur  $\alpha = 1$ .



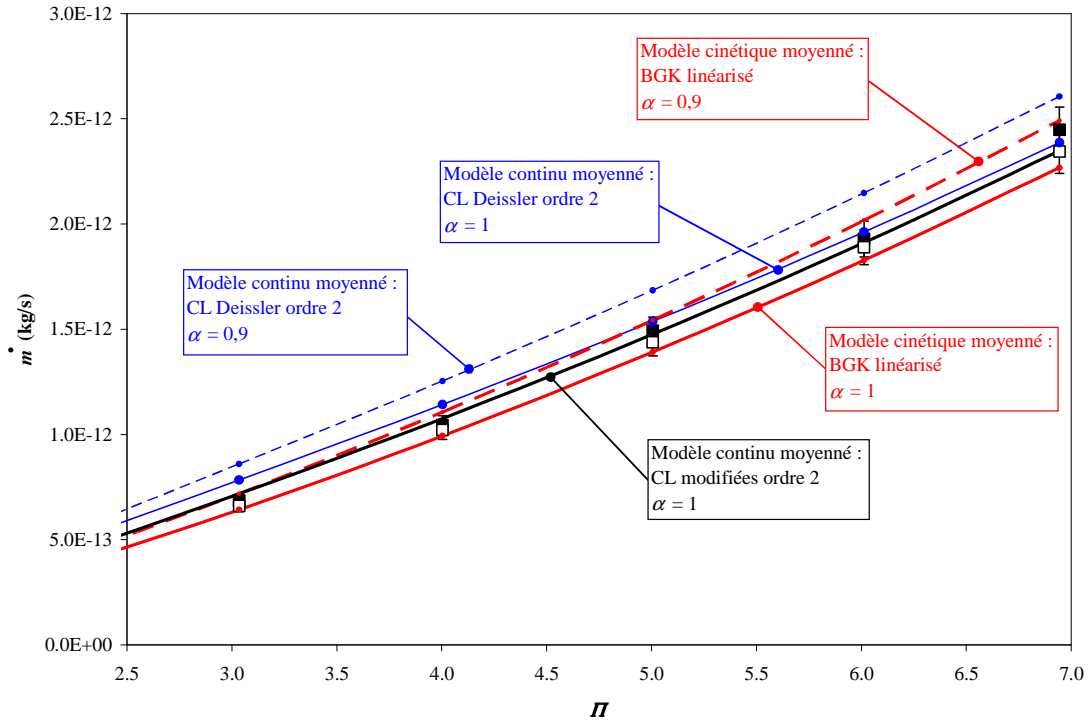


**Figure 5.5 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour l'hélium : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (■) et à la sortie (□) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15\text{ K}$ ,

$$P_b \approx 5 \times 10^4 \text{ Pa}, \quad 0,057 < Kn_0 < 0,088, \quad 10,11 < \delta_0 < 15,6.$$

Les mesures précédentes sont répétées avec l'hélium. La Figure 5.5 présente les résultats pour des écoulements d'hélium avec une pression aval d'environ  $5 \times 10^4$  Pa. Le rapport des pressions va de 1,6 à 3. Les écoulements d'hélium sont plus raréfiés que les ceux d'argon dans les mêmes conditions de pression et les nombres moyens de Knudsen et de raréfaction associés sont maintenant tels que :  $0,057 < Kn_0 < 0,088$  et  $10,11 < \delta_0 < 15,6$ . On constate maintenant un écart plus accentué entre les courbes tracées pour  $\alpha = 1$  et pour  $\alpha = 0,9$ , ce qui traduit une influence plus forte de la raréfaction à la paroi. Mais cela concerne essentiellement le terme d'ordre 1 de la condition de glissement : en effet le terme d'ordre 2 semble jouer un rôle encore limité, car les courbes du modèle de Deissler et du modèle modifié sont toujours très proches. Les points expérimentaux correspondant aux débits mesurés à l'amont et à l'aval sont plus éloignés les uns des autres que dans le cas de l'argon, avec un débit amont pouvant

être légèrement supérieur au débit aval, tout en restant compatible avec les incertitudes de mesures.



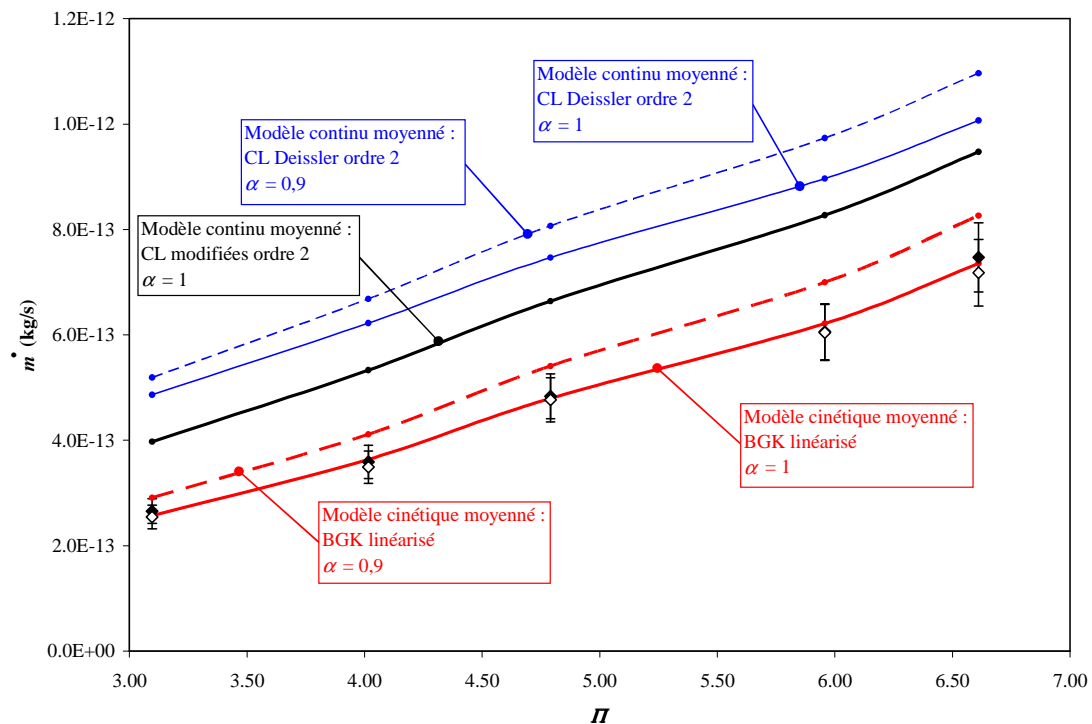
**Figure 5.6 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour l'hélium : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (■) et à la sortie (□) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15 \text{ K}$ ,

$$P_B \approx 1,5 \times 10^4 \text{ Pa}, \quad 0,095 < Kn_0 < 0,188, \quad 4,73 < \delta_0 < 9,30.$$

Les résultats présentés sur la Figure 5.6 concernent toujours l'hélium mais correspondent maintenant au début du régime de transition. La pression aval est maintenue à environ 15 kPa. La pression à l'amont est adaptée afin d'obtenir un rapport de pression allant de 3 à 7. Le nombre de Knudsen moyen et le paramètre de raréfaction moyen sont tels que :  $0,095 < Kn_0 < 0,188$  et  $4,73 < \delta_0 < 9,30$ . Les résultats du modèle continu de Deissler commencent à surestimer les mesures expérimentales, notamment pour les plus faibles valeurs de  $\Pi$  qui correspondent aux plus fortes valeurs du nombre de Knudsen. Les résultats du modèle modifié avec  $\alpha = 1$  surestiment légèrement le débit massique quand  $2 < \Pi < 4$ . Pour  $5 < \Pi < 7$ , les débits massiques calculés pour une valeur moyenne du paramètre de raréfaction  $\delta_0$  sont en bon accord avec les résultats des

mesures. Les résultats du modèle BGK linéarisé avec  $\alpha = 1$  sous-estiment un peu le débit massique. Un bon accord entre ce modèle et les point expérimentaux est observé pour une valeur de  $\alpha$  comprise entre 0,9 et 1.

Les figures suivantes présentent les résultats pour une raréfaction plus poussée encore. La série de mesures suivante (voir Figure 5.7) a été effectuée avec de l'argon à une pression aval d'environ 2 kPa.

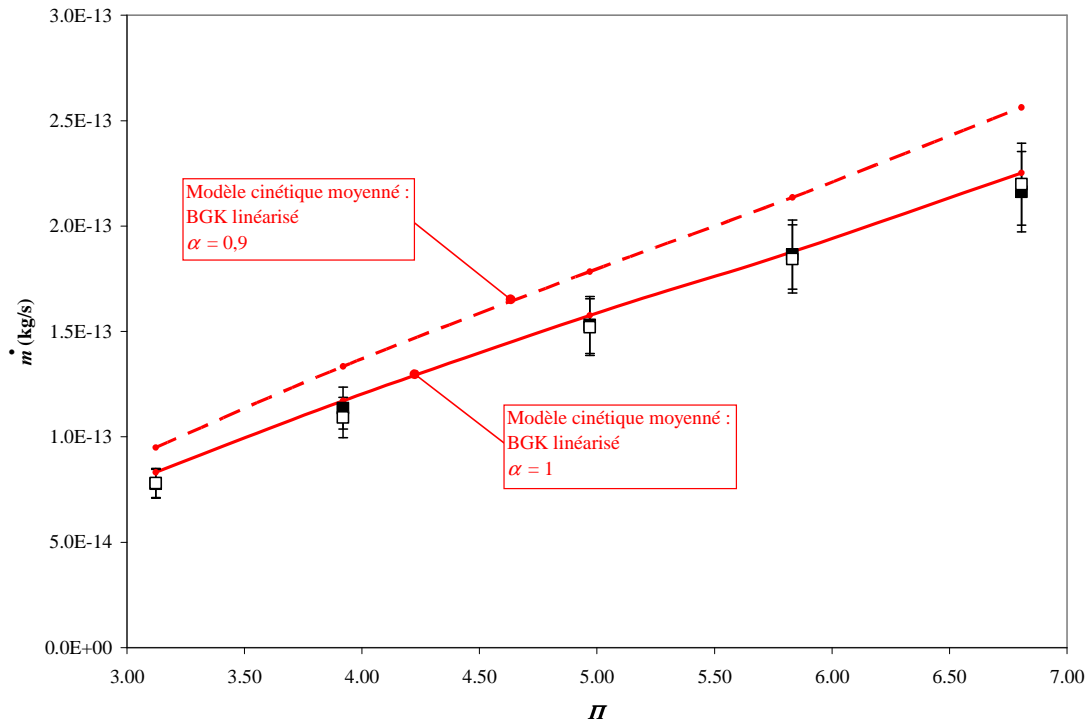


**Figure 5.7 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour l'argon : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée ( $\blacklozenge$ ) et à la sortie ( $\diamond$ ) et modèles cinétique et continu à  $T = 298,15\text{ K}$ ,

$$P_b \approx 2 \times 10^3 \text{ Pa}, \quad 0,25 < Kn_0 < 0,5, \quad 1,7 < \delta_0 < 3,4.$$

La pression à l'amont est adaptée afin d'obtenir un rapport de pression allant de 3,1 à 6,7. Le nombre de Knudsen moyen et le paramètre de raréfaction moyen sont tels que  $0,25 < Kn_0 < 0,5$  et  $1,7 < \delta_0 < 3,4$ . Les résultats du modèle BGK linéarisé avec  $\alpha = 1$  sont en excellent accord avec les résultats expérimentaux. La Figure 5.7 montre également la limite d'utilisation des modèles d'approche continue. Les courbes relatives

aux modèles d'ordre 2 de Deissler surestiment maintenant largement les résultats expérimentaux. C'est également vrai, mais dans une moindre mesure, pour le modèle modifié.



**Figure 5.8** : Débit massique en fonction du rapport de pression pour l'hélium : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (■) et à la sortie (□) et modèles cinétique à  $T = 298,15 \text{ K}$ ,  $P_b \approx 2 \times 10^3 \text{ Pa}$ ,  $0,7 < Kn_0 < 1,5$ ,  $0,6 < \delta_0 < 1,2$ .

Dans les mêmes conditions de pression que précédemment (pression aval d'environ 2 kPa), on présente sur la Figure 5.8 les résultats obtenus avec l'hélium. Pour des rapports de pression compris entre 3,1 et 6,8, les nombres de Knudsen et paramètres de raréfaction associés sont alors tels que :  $0,7 < Kn_0 < 1,5$  et  $0,6 < \delta_0 < 1,2$ . Les écarts entre valeurs expérimentales mesurées à l'amont et à l'aval sont très faibles. La courbe relative au modèle BGK linéarisé avec  $\alpha = 1$  est en très bon accord avec les résultats expérimentaux.

En conclusion, pour ces deux gaz simples, on peut constater que le modèle modifié a une plage de validité un peu plus étendue que le modèle de Deissler. Le modèle BGK linéarisé est en très bon accord avec les résultats expérimentaux dans tous les régimes d'écoulement testés avec  $\alpha = 1$ , davantage encore dans le régime de transition.

### **5.3.3. Comparaison des données expérimentales avec les modèles continus et cinétique intégré**

Dans cette partie, on analyse l'influence de l'approximation faite dans la partie 5.3.2 lorsqu'on utilise les modèles continus avec une valeur moyenne du nombre de Knudsen. On compare les calculs des débits précédents (modèles continus moyennés) avec un calcul tenant compte de l'évolution du nombre de Knudsen le long du microcanal (modèles continus) pour le modèle de Deissler et le modèle modifié. D'autre part, on examine l'influence du type de moyenne effectuée sur le paramètre  $G$  dans le modèle BGK linéarisé : on compare les débits fournis par le modèle moyenné et le modèle intégré.

Pour chaque valeur de la pression aval (50 kPa, 15 kPa et 2kPa), on présente dans les tableaux suivants les différents débits théoriques et expérimentaux, ainsi que les écarts relatifs entre les calculs théoriques et les mesures expérimentales.

ARGON - $P_B = 50 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$									
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)								
	Mesure			BGK		Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	intégré 30 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
1,60	4,28E-12	4,39E-12	4,34E-12	4,35E-12	4,48E-12	4,30E-12	4,30E-12	4,36E-12	4,36E-12
1,80	6,09E-12	6,19E-12	6,14E-12	6,10E-12	6,27E-12	6,03E-12	6,03E-12	6,11E-12	6,12E-12
1,98	7,80E-12	7,88E-12	7,84E-12	7,86E-12	8,06E-12	7,76E-12	7,76E-12	7,87E-12	7,87E-12
2,50	1,37E-11	1,34E-11	1,35E-11	1,35E-11	1,38E-11	1,33E-11	1,33E-11	1,35E-11	1,35E-11
2,99	1,95E-11	1,97E-11	1,96E-11	1,98E-11	2,02E-11	1,95E-11	1,96E-11	1,98E-11	1,98E-11

ARGON - $P_B = 50 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$							
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatif par rapport aux débits mesurés moyens (%)					
		BGK		Deissler		Modifié	
		moyenné	intégré 30 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
1,60	3,18E-02	0,40	3,24	-0,81	-0,76	0,59	0,63
1,80	2,96E-02	-0,58	2,10	-1,83	-1,75	-0,43	-0,39
1,98	2,77E-02	0,25	2,85	-1,04	-0,94	0,38	0,41
2,50	2,36E-02	-0,35	1,96	-1,65	-1,52	-0,27	-0,26
2,99	2,07E-02	0,85	2,98	-0,45	-0,30	0,90	0,89
moyenne des points		0,11	2,63	-1,16	-1,05	0,24	0,26

**Tableau 5.3** : Débits massiques en fonction du rapport de pression pour l'argon : comparaison entre résultats expérimentaux à l'amont, à l'aval et modèles BGK, de Deissler et modifié à  $T = 298,15 \text{ K}$  .

Le Tableau 5.3 est relatif à l'écoulement d'argon pour une pression aval de 50 kPa. L'approximation des modèles continus moyennés apparaît justifiée dans cette plage du nombre de Knudsen moyen  $0,021 < Kn_0 < 0,032$  ; les écarts avec les modèles tenant compte de l'évolution de  $Kn$  le long du canal sont en effet très faibles. En revanche, la seconde manière de moyenner le paramètre  $G$  dans le modèle BGK linéarisé donne un moins bon accord entre expérience et théorie.

ARGON - $P_B = 15 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$									
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)								
	Mesure			BGK		Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	intégré 30 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
3,06	2,82E-12	3,01E-12	2,91E-12	2,88E-12	2,96E-12	2,92E-12	2,95E-12	2,92E-12	2,95E-12
4,06	4,80E-12	4,88E-12	4,84E-12	4,77E-12	4,89E-12	4,78E-12	4,83E-12	4,81E-12	4,85E-12
5,06	7,23E-12	7,11E-12	7,17E-12	7,01E-12	7,18E-12	6,98E-12	7,06E-12	7,05E-12	7,11E-12
6,01	9,66E-12	9,73E-12	9,70E-12	9,47E-12	9,68E-12	9,38E-12	9,49E-12	9,50E-12	9,57E-12
7,00	1,24E-11	1,26E-11	1,25E-11	1,23E-11	1,26E-11	1,22E-11	1,23E-11	1,24E-11	1,25E-11

ARGON - $P_B = 15 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$							
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatif par rapport aux débits mesurés moyens (%)					
		BGK		Deissler		Modifié	
		moyenné	intégré 30 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
3,06	6,79E-02	-1,23	1,52	0,32	1,37	0,30	1,08
4,06	5,46E-02	-1,53	1,01	-1,34	-0,17	-0,58	0,17
5,06	4,55E-02	-2,16	0,16	-2,68	-1,52	-1,60	-0,85
6,01	3,94E-02	-2,34	-0,19	-3,23	-2,11	-1,97	-1,27
7,00	3,45E-02	-1,28	0,75	-2,38	-1,32	-1,01	-0,38
moyenne des points		-1,71	0,65	-1,86	-0,75	-0,97	-0,25

**Tableau 5.4 :** Débits massiques en fonction du rapport de pression pour l'argon : comparaison entre résultats expérimentaux à l'amont, à l'aval et modèles BGK, de Deissler et modifié à  $T = 298,15 \text{ K}$ .

Le Tableau 5.4 est relatif à l'écoulement d'argon pour une pression aval de 15 kPa. L'écoulement est plus raréfié avec un nombre de Knudsen moyen  $0,035 < Kn_0 < 0,068$ . L'amélioration apportée par les modèles continus non moyennés est alors sensible (l'écart moyen entre modèle modifié et mesures expérimentales passe de  $-0,97 \%$  à  $-0,25 \%$ ). Dans ce régime, la seconde méthode de calcul de  $G$  pour le modèle BGK linéarisé donne également des résultats plus proches de l'expérience.

ARGON - $P_B = 2 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$									
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)								
	Mesure			BGK		Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	intégré 30 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
3,06	2,66E-13	2,55E-13	2,60E-13	2,57E-13	2,67E-13	4,86E-13	5,18E-13	3,79E-13	3,98E-13
4,06	3,59E-13	3,49E-13	3,54E-13	3,64E-13	3,79E-13	6,22E-13	6,78E-13	5,00E-13	5,33E-13
5,06	4,84E-13	4,77E-13	4,80E-13	4,80E-13	4,98E-13	7,47E-13	8,23E-13	6,20E-13	6,64E-13
6,01	6,06E-13	6,05E-13	6,05E-13	6,22E-13	6,45E-13	8,97E-13	1,00E-12	7,65E-13	8,27E-13
7,00	7,47E-13	7,18E-13	7,33E-13	7,36E-13	7,62E-13	1,01E-12	1,13E-12	8,76E-13	9,48E-13

ARGON - $P_B = 2 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$							
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatif par rapport aux débits mesurés moyens (%)					
		BGK		Deissler		Modifié	
		moyenné	intégré 30 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
3,06	5,04E-01	-1,20	2,77	87,04	99,19	45,79	52,91
4,06	4,20E-01	2,77	6,93	75,71	91,40	41,32	50,51
5,06	3,51E-01	-0,18	3,73	55,42	71,27	28,96	38,25
6,01	2,99E-01	2,70	6,63	48,16	65,74	26,34	36,64
7,00	2,65E-01	0,42	4,07	37,42	54,15	19,53	29,33
moyenne des points		0,90	4,83	60,75	76,35	32,39	41,53

**Tableau 5.5 :** Débits massiques en fonction du rapport de pression pour l'argon : comparaison entre résultats expérimentaux à l'amont, à l'aval et modèles BGK, de Deissler et modifié à  $T = 298,15 \text{ K}$ .

Le Tableau 5.5 est relatif à l'écoulement d'argon pour une pression aval de 2 kPa. Avec  $0,27 < Kn_0 < 0,50$ , les modèles continus surestiment les mesures de 32 à 76 %, ce qui est considérable. L'écart entre modèle BGK linéarisé et points expérimentaux augmente avec la seconde méthode de calcul de  $G$ .



HELIUM - $P_B = 50$ kPa , $\alpha = 1$									
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)								
	Mesure			BGK		Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	intégré 30 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
1,58	8,00E-13	7,37E-13	7,69E-13	7,61E-13	7,84E-13	7,92E-13	7,94E-13	7,83E-13	7,84E-13
1,72	1,06E-12	9,68E-13	1,01E-12	1,01E-12	1,04E-12	1,04E-12	1,04E-12	1,03E-12	1,04E-12
1,95	1,38E-12	1,31E-12	1,34E-12	1,35E-12	1,39E-12	1,38E-12	1,39E-12	1,38E-12	1,38E-12
2,42	2,26E-12	2,13E-12	2,19E-12	2,19E-12	2,24E-12	2,21E-12	2,22E-12	2,22E-12	2,22E-12
2,90	3,26E-12	3,09E-12	3,18E-12	3,13E-12	3,21E-12	3,14E-12	3,16E-12	3,17E-12	3,18E-12

HELIUM - $P_B = 50$ kPa , $\alpha = 1$							
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatif par rapport aux débits mesurés moyens (%)					
		BGK		Deissler		Modifié	
		moyenné	intégré 30 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
1,58	8,77E-02	-1,06	1,98	3,06	3,32	1,89	2,04
1,72	8,12E-02	0,11	2,60	2,84	3,17	2,17	2,32
1,95	7,60E-02	0,73	3,15	2,77	3,23	2,47	2,67
2,42	6,50E-02	-0,01	2,18	0,64	1,27	1,04	1,32
2,90	5,68E-02	-1,55	1,06	-1,16	-0,43	-0,32	0,00
moyenne des points		-0,35	2,20	1,63	2,11	1,45	1,67

**Tableau 5.6 :** Débits massiques en fonction du rapport de pression pour l'hélium : comparaison entre résultats expérimentaux à l'amont, à l'aval et modèles BGK, de Deissler et modifié à  $T = 298,15$  K .

Le Tableau 5.6 est relatif à l'écoulement d'hélium pour une pression aval de 50 kPa. Ici,  $0,057 < Kn_0 < 0,088$ , et on peut faire les mêmes remarques que dans le cas de l'argon à la même pression (voir Tableau 5.3), bien que les nombres de Knudsen soient alors plus élevés : les valeurs fournies par les modèles continus moyennés ou non-moyennés sont très proches et la seconde méthode de calcul de  $G$  pour le modèle BGK linéarisé donne des résultats un peu moins proches des mesures.

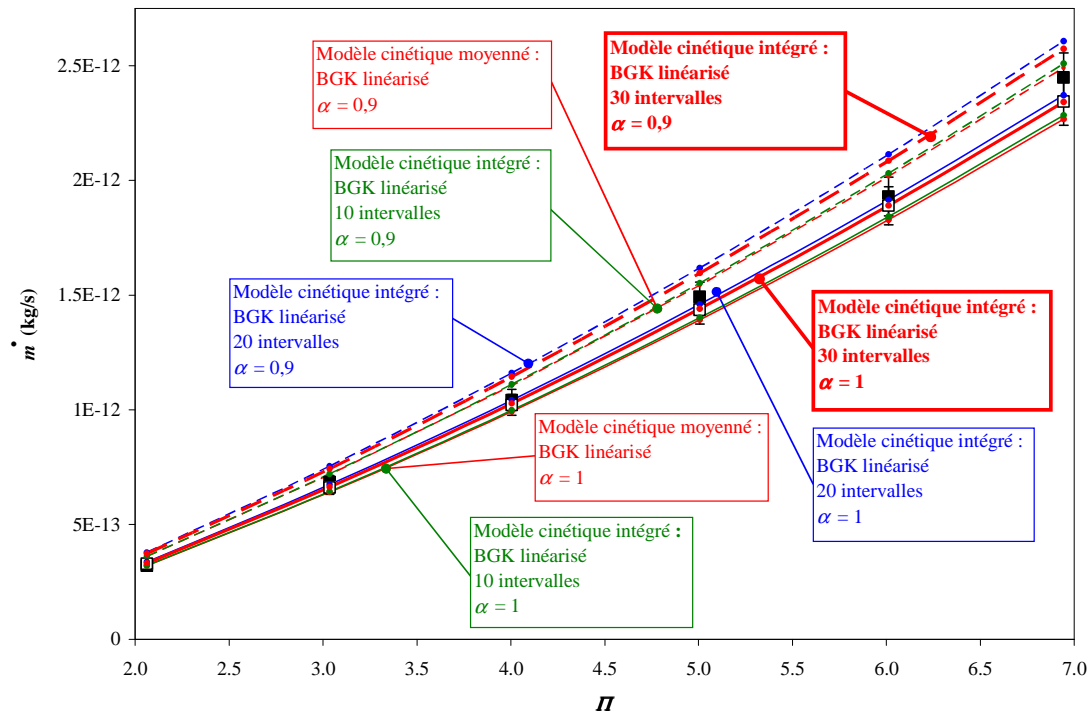
## Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux

HELIUM - $P_b = 15 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$									
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)								
	Mesure			BGK		Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	intégré 30 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
3,03	6,85E-13	6,61E-13	6,73E-13	6,42E-13	6,64E-13	7,84E-13	8,10E-13	7,18E-13	7,33E-13
4,00	1,04E-12	1,02E-12	1,03E-12	9,93E-13	1,03E-12	1,14E-12	1,19E-12	1,08E-12	1,10E-12
5,01	1,49E-12	1,44E-12	1,46E-12	1,39E-12	1,44E-12	1,54E-12	1,61E-12	1,48E-12	1,52E-12
6,01	1,93E-12	1,89E-12	1,91E-12	1,83E-12	1,89E-12	1,96E-12	2,06E-12	1,91E-12	1,97E-12
6,94	2,45E-12	2,34E-12	2,40E-12	2,27E-12	2,34E-12	2,39E-12	2,50E-12	2,35E-12	2,41E-12

HELIUM - $P_b = 15 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$							
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatifs par rapport aux débits mesurés moyens (%)					
		BGK		Deissler		Modifié	
		moyenné	intégré 30 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
3,03	1,88E-01	-4,62	-1,26	16,49	20,36	6,74	8,99
4,00	1,51E-01	-3,77	-0,38	10,69	15,33	4,25	6,95
5,01	1,26E-01	-4,92	-1,63	4,95	9,79	0,82	3,63
6,01	1,08E-01	-4,25	-1,00	2,75	7,64	0,11	2,93
6,94	9,53E-02	-5,38	-2,25	-0,36	4,36	-2,02	0,73
moyenne des points		-4,59	-1,30	6,90	11,49	1,98	4,65

**Tableau 5.7 :** Débits massiques en fonction du rapport de pression pour l'hélium : comparaison entre résultats expérimentaux à l'amont, à l'aval et modèles BGK, de Deissler et modifié à  $T = 298,15 \text{ K}$  .

A 15 kPa de pression aval,  $0,095 < Kn_0 < 0,19$  (Tableau 5.7), le modèle de Deissler devient très imprécis (plus de 10% d'écart avec les valeurs expérimentales) et le modèle modifié, meilleur, commence à montrer ses limites. Le modèle BGK est meilleur, surtout avec la seconde méthode de calcul de  $G$ , avec une moyenne prise sur 30 intervalles de  $\delta$ . L'influence du nombre d'intervalles est analysé sur la Figure 5.9 et dans le Tableau 5.8 ci-dessous.



**Figure 5.9 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour l'hélium : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (■) et à la sortie (□) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15 \text{ K}$ ,

$$P_b \approx 1,5 \times 10^4 \text{ Pa}, \quad 0,095 < Kn_0 < 0,188, \quad 4,73 < \delta_0 < 9,30.$$

Le nombre d'intervalles utilisé pour calculer  $G$  par l'équation (5.21) joue un rôle non négligeable. Dans le cas illustré ici, le choix de 10 intervalles donne sensiblement le même débit que la méthode BGK moyennée pour laquelle  $G$  est obtenu par l'équation (5.20). En revanche, le résultat varie dans des proportions allant jusque 4% environ lorsque le nombre d'intervalles passe à 20, 30 ou 40. Cela donne un ordre de grandeur de l'erreur introduite lors de la prise de moyenne effectuée par les équations (5.20) et (5.21), particulièrement sur la partie non linéaire de la courbe  $G(\delta)$ .

## Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux

HELIUM - $P_B = 15 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			BGK				
	amont	aval	moyenne	moyenné	intégré 10 intervalles	intégré 20 intervalles	intégré 30 intervalles	intégré 40 intervalles
3,03	6,85E-13	6,61E-13	6,73E-13	6,42E-13	6,45E-13	6,74E-13	6,64E-13	-
4,00	1,04E-12	1,02E-12	1,03E-12	9,93E-13	9,99E-13	1,04E-12	1,03E-12	-
5,01	1,49E-12	1,44E-12	1,46E-12	1,39E-12	1,40E-12	1,46E-12	1,44E-12	-
6,01	1,93E-12	1,89E-12	1,91E-12	1,83E-12	1,84E-12	1,91E-12	1,89E-12	-
6,94	2,45E-12	2,34E-12	2,40E-12	2,27E-12	2,28E-12	2,37E-12	2,34E-12	2,33E-12

HELIUM - $P_B = 15 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatif par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		BGK				
		moyenné	intégré 10 intervalles	intégré 20 intervalles	intégré 30 intervalles	intégré 40 intervalles
3,03	1,88E-01	-4,62	-4,19	0,21	-1,26	-
4,00	1,51E-01	-3,77	-3,19	1,04	-0,38	-
5,01	1,26E-01	-4,92	-4,27	-0,29	-1,63	-
6,01	1,08E-01	-4,25	-3,53	0,28	-1,00	-
6,94	9,53E-02	-5,38	-4,64	-1,04	-2,25	-2,86
moyenne des points		-4,59	-3,96	0,04	-1,30	-2,86

**Tableau 5.8** : Débits massiques en fonction du rapport de pression pour l'hélium : comparaison entre résultats expérimentaux à l'amont, à l'aval et modèles BGK à 10, 20, 30 et 40 intervalles à  $T = 298,15 \text{ K}$  .

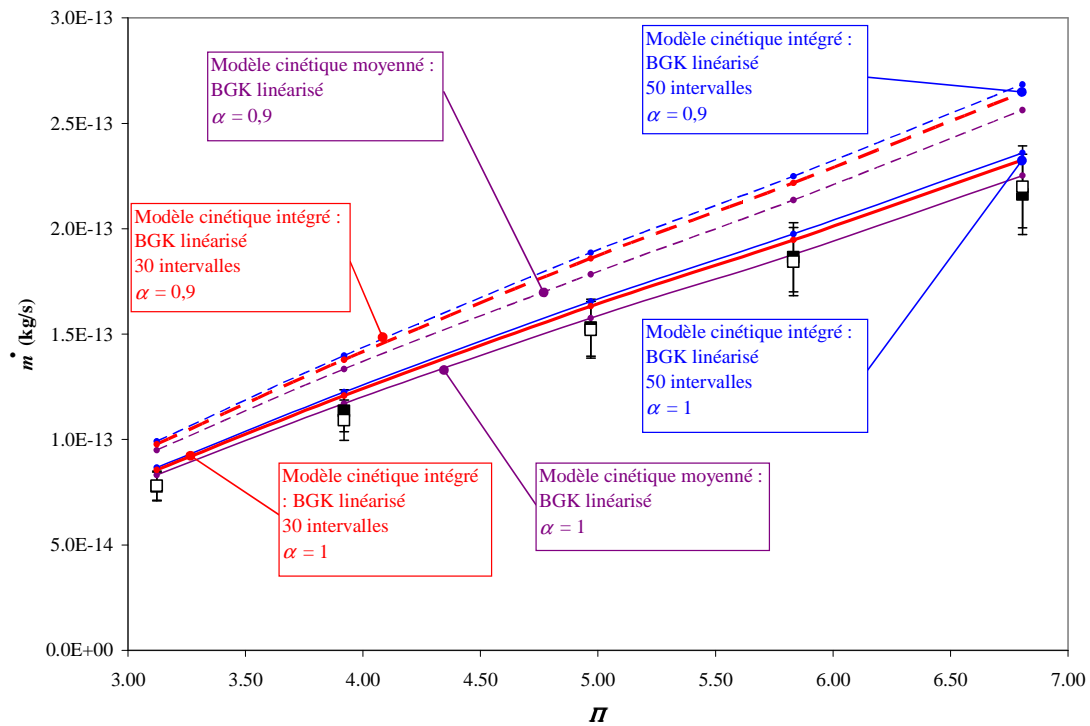
## Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux

HELIUM - $P_B = 2 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$										
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)									
	Mesure			BGK		Deissler		Modifié		
	amont	aval	moyenne	moyenné	intégré 30 intervalles	intégré 50 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
3,12	7,78E-14	7,82E-14	7,80E-14	8,32E-14	8,68E-14	8,56E-14	3,15E-13	3,43E-13	2,11E-13	2,28E-13
3,92	1,14E-13	1,09E-13	1,11E-13	1,17E-13	1,23E-13	1,21E-13	3,79E-13	4,24E-13	2,61E-13	2,87E-13
4,97	1,53E-13	1,52E-13	1,53E-13	1,58E-13	1,66E-13	1,63E-13	4,44E-13	5,14E-13	3,14E-13	3,55E-13
5,83	1,87E-13	1,84E-13	1,85E-13	1,88E-13	1,98E-13	1,95E-13	4,87E-13	5,77E-13	3,50E-13	4,03E-13
6,81	2,16E-13	2,20E-13	2,18E-13	2,25E-13	2,36E-13	2,33E-13	5,33E-13	6,43E-13	3,91E-13	4,55E-13

HELIUM - $P_B = 2 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$									
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatifs par rapport aux débits mesurés moyens (%)							
		BGK			Deissler		Modifié		
		moyenné	intégré 30 intervalles	intégré 50 intervalles	moyenné	-	moyenné	-	
3,12	1,43E+00	6,68	11,32	9,80	304,03	339,83	171,03	192,00	
3,92	1,15E+00	5,13	10,02	8,49	239,74	280,94	133,85	157,97	
4,97	9,43E-01	3,37	8,51	6,99	190,91	236,85	105,54	132,45	
5,83	8,37E-01	1,24	6,49	4,99	162,70	210,90	88,82	117,05	
6,81	7,33E-01	3,30	8,19	6,66	144,33	194,89	79,15	108,76	
moyenne des points		3,94	8,91	7,39	208,34	252,68	115,68	141,65	

**Tableau 5.9 :** Débits massiques en fonction du rapport de pression pour l'hélium : comparaison entre résultats expérimentaux à l'amont, à l'aval et modèles BGK, de Deissler et modifié à  $T = 298,15 \text{ K}$ .

A 2 kPa de pression aval,  $0,73 < Kn_0 < 1,4$  (Tableau 5.9), les modèles de Deissler et modifié ne sont plus du tout adaptés, avec des écarts par rapport à l'expérimental variant entre 110 % et 340 %, d'autant plus importants que la raréfaction est élevée. Le modèle BGK reste en accord avec les mesures, en donnant des débits supérieurs de 4 à 9 % en moyenne aux valeurs expérimentales, selon le type de moyenne de  $G$  utilisé.



**Figure 5.10 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour l'hélium : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (■) et à la sortie (□) et modèles cinétique à 30 et 50 intervalles à  $T = 298,15 \text{ K}$ ,  $P_b \approx 2 \times 10^3 \text{ Pa}$ ,  $0,7 < Kn_0 < 1,5$ ,  $0,6 < \delta_0 < 1,2$ .

La Figure 5.10 donne une visualisation de l'influence du type de moyenne de  $G$  lors de l'emploi du modèle BGK linéarisé. Les écarts entre les résultats théoriques restent cependant inférieurs à l'incertitude expérimentale.

## 5.4. Écoulement de mélange gazeux binaire

### 5.4.1. Mesures expérimentales

Ce paragraphe présente les résultats obtenus avec des mélanges d'argon et d'hélium. Les mélanges étudiés sont les suivants : 10% d'hélium – 90% d'argon, 30% d'hélium – 70% d'argon, 50% d'hélium – 50% d'argon, 70% d'hélium – 30% d'argon et 90% d'hélium – 10% d'argon. L'ensemble des résultats de chaque mélange est regroupé

en trois séries correspondant à des pressions aval  $P_B$  de 50 kPa, 15 kPa et 2 kPa. Le rapport de pressions  $\Pi = P_A / P_B$  varie entre 1,4 et 7. Les régimes d'écoulement vont du régime glissant jusqu'au début du régime de transition. Le cas le plus raréfié étudié présente un nombre de Knudsen et un paramètre de raréfaction moyens de 0,364 et 4,48 respectivement. Les résultats expérimentaux, regroupant nombre de Knudsen moyen, rapports de pression, pressions amont et aval et débits massiques mesurés sont présentés dans les tableaux suivants (Tableau 5.10 à Tableau 5.14).

		$Kn_0$	$\Pi$	Pression (Pa)		Débit (kg/s)	
				$P_A$	$P_B$	$m_A$	$m_B$
10%He-90%Ar	$P_B = 50$ kPa	3,32E-02	1,60	79535	49847	3,96E-12	4,12E-12
		3,08E-02	1,80	89950	49845	5,74E-12	5,76E-12
		2,87E-02	2,00	99821	49846	7,52E-12	7,52E-12
		2,70E-02	2,19	109393	49848	9,21E-12	9,21E-12
		2,54E-02	2,39	119327	49852	1,16E-11	1,12E-11
		2,40E-02	2,59	129284	49861	1,35E-11	1,34E-11
	$P_B = 15$ kPa	7,10E-02	3,03	45446	15000	2,71E-12	2,78E-12
		5,60E-02	4,08	61239	15003	4,71E-12	4,69E-12
		4,70E-02	5,04	75634	14997	7,21E-12	6,89E-12
		4,10E-02	6,01	90077	14997	8,92E-12	9,17E-12
		3,60E-02	7,04	105600	14999	1,18E-11	1,19E-11
	$P_B = 2$ kPa	5,35E-01	3,02	6038	2001	2,60E-13	2,45E-13
		4,33E-01	3,96	7929	2000	3,79E-13	3,72E-13
		3,46E-01	5,21	10422	2002	5,36E-13	5,09E-13
		3,04E-01	6,08	12158	2001	6,49E-13	6,41E-13
		2,82E-01	6,62	13245	2000	7,34E-13	6,94E-13

**Tableau 5.10** : Données expérimentales et débits mesurés - mélange 10 % He – 90 % Ar à  $T = 298,15$  K.

		$Kn_0$	$\Pi$	Pression (Pa)		Débit (kg/s)	
				$P_A$	$P_B$	$m_A$	$m_B$
30%He-70%Ar	$P_B = 50$ kPa	3,78E-02	1,63	80567	49577	3,39E-12	3,51E-12
		3,52E-02	1,80	89779	49943	4,74E-12	4,73E-12
		3,28E-02	2,01	100190	49914	6,32E-12	6,24E-12
		2,80E-02	2,50	125256	50112	1,05E-11	1,03E-11
		2,46E-02	2,99	150093	50151	1,53E-11	1,50E-11
	$P_B = 15$ kPa	8,11E-02	3,04	45655	15000	2,41E-12	2,47E-12
		6,54E-02	4,01	60226	15001	3,96E-12	3,95E-12
		5,44E-02	5,03	75453	15001	5,85E-12	5,76E-12
		4,66E-02	6,04	90604	15002	7,82E-12	7,87E-12
		4,10E-02	7,00	105047	14999	1,00E-11	9,91E-12
	$P_B = 2$ kPa	6,02E-01	3,07	6155	2007	2,61E-13	2,53E-13
		4,87E-01	4,03	8088	2006	3,72E-13	3,71E-13
		4,08E-01	5,00	10029	2005	5,05E-13	5,13E-13
		3,57E-01	5,94	11774	1984	6,22E-13	6,12E-13
		3,18E-01	6,67	13452	2017	7,02E-13	6,97E-13

 Tableau 5.11 : Données expérimentales et débits mesurés - mélange 30 % He – 70 % Ar à  $T = 298,15$  K.

		$Kn_0$	$\Pi$	Pression (Pa)		Débit (kg/s)	
				$P_A$	$P_B$	$m_A$	$m_B$
50%He-50%Ar	$P_B = 50$ kPa	4,40E-02	1,60	80075	50015	2,83E-12	2,66E-12
		4,09E-02	1,80	90064	50015	3,94E-12	3,71E-12
		3,83E-02	1,99	99642	49993	5,13E-12	4,78E-12
		3,58E-02	2,20	110155	50010	6,37E-12	6,09E-12
		3,37E-02	2,41	120229	49908	7,92E-12	7,39E-12
		3,18E-02	2,61	130381	49997	9,31E-12	8,78E-12
	$P_B = 15$ kPa	9,32E-02	3,10	46459	15006	2,13E-12	2,17E-12
		7,50E-02	4,09	61429	15017	3,54E-12	3,42E-12
		6,32E-02	5,04	75678	15002	4,73E-12	4,77E-12
		5,44E-02	6,02	90343	15007	6,42E-12	6,32E-12
		4,77E-02	7,00	105166	15015	8,26E-12	8,12E-12
	$P_B = 2$ kPa	7,10E-01	3,03	6070	2001	2,60E-13	2,38E-13
		5,66E-01	4,06	8117	2000	3,78E-13	3,53E-13
		4,75E-01	5,03	10064	2000	4,74E-13	4,53E-13
		4,15E-01	5,91	11823	2000	5,68E-13	5,47E-13
3,86E-01		6,42	12854	2001	6,37E-13	6,07E-13	

 Tableau 5.12 : Données expérimentales et débits mesurés - mélange 50 % He – 50 % Ar à  $T = 298,15$  K.



		$Kn_0$	$\Pi$	Pression (Pa)		Débit (kg/s)	
				$P_A$	$P_B$	$m_A$	$m_B$
70%He-30%Ar	$P_B = 50$ kPa	5,33E-02	1,60	80248	50013	2,11E-12	1,93E-12
		4,97E-02	1,79	89756	50017	2,85E-12	2,67E-12
		4,64E-02	1,99	99743	50024	3,74E-12	3,45E-12
		4,35E-02	2,19	109643	50004	4,59E-12	4,33E-12
		4,10E-02	2,39	119413	50004	5,60E-12	5,22E-12
		3,88E-02	2,58	129153	49995	6,57E-12	6,16E-12
	$P_B = 15$ kPa	1,14E-01	3,05	45822	15040	1,56E-12	1,59E-12
		9,21E-02	4,03	60422	14995	2,56E-12	2,52E-12
		7,70E-02	5,02	75283	14993	3,55E-12	3,50E-12
		6,63E-02	5,98	89753	15006	4,64E-12	4,61E-12
		5,78E-02	7,01	105111	15001	6,05E-12	6,00E-12
	$P_B = 2$ kPa	8,56E-01	3,06	6118	2001	2,18E-13	1,96E-13
		7,04E-01	3,94	7874	1999	3,03E-13	2,88E-13
		5,41E-01	5,42	10854	2001	4,33E-13	4,21E-13
		5,06E-01	5,87	11735	2000	4,66E-13	4,53E-13
4,74E-01		6,33	12665	2000	5,06E-13	4,97E-13	

 Tableau 5.13 : Données expérimentales et débits mesurés - mélange 70 % He – 30 % Ar à  $T = 298,15$  K.

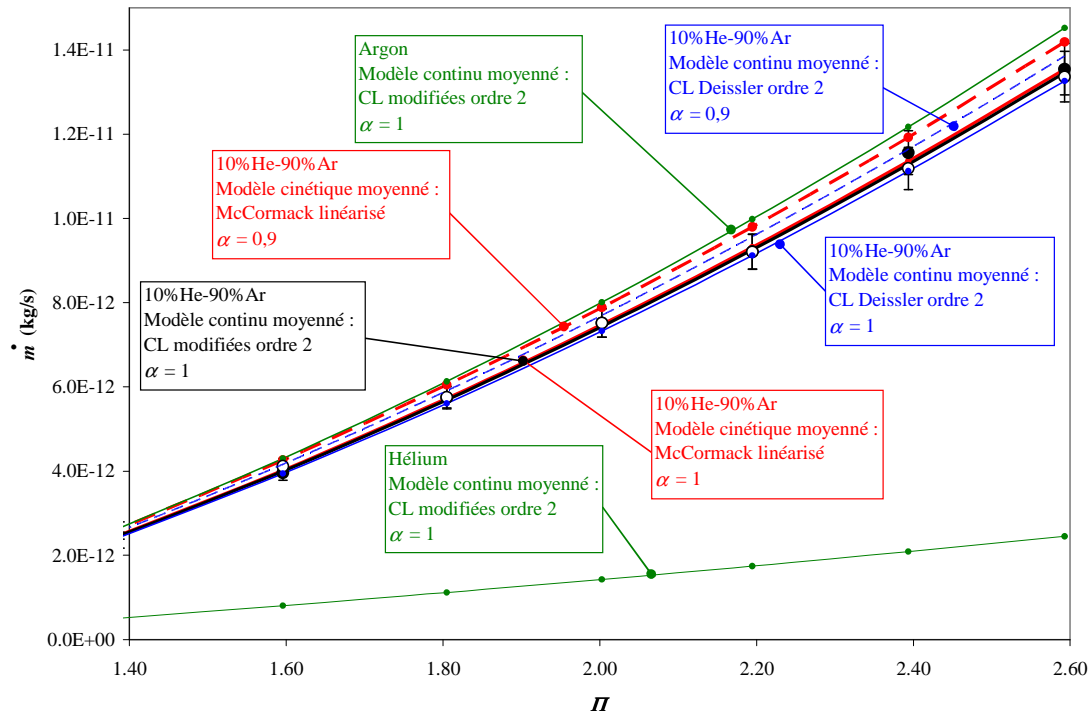
		$Kn_0$	$\Pi$	Pression (Pa)		Débit (kg/s)	
				$P_A$	$P_B$	$m_A$	$m_B$
90%He-10%Ar	$P_B = 50$ kPa	6,96E-02	1,60	80259	50021	1,37E-12	1,26E-12
		6,47E-02	1,81	90305	50009	1,88E-12	1,75E-12
		6,05E-02	2,00	99896	50007	2,40E-12	2,24E-12
		5,69E-02	2,19	109333	50020	2,90E-12	2,74E-12
		5,34E-02	2,40	119804	50001	3,56E-12	3,35E-12
		5,03E-02	2,60	130291	50020	4,27E-12	3,94E-12
	$P_B = 15$ kPa	1,52E-01	2,99	44894	14994	1,05E-12	1,03E-12
		1,20E-01	4,04	60623	15004	1,71E-12	1,65E-12
		1,00E-01	5,03	75463	15007	2,39E-12	2,31E-12
		8,53E-02	6,09	91371	15002	3,24E-12	3,06E-12
		7,60E-02	6,96	104427	15012	3,85E-12	3,82E-12
	$P_B = 2$ kPa	1,13E+00	3,01	6018	2000	1,40E-13	1,33E-13
		9,16E-01	3,95	7910	2000	2,00E-13	1,92E-13
		7,31E-01	5,20	10408	2000	2,77E-13	2,61E-13
		6,59E-01	5,88	11769	2001	3,09E-13	3,07E-13
6,21E-01		6,31	12619	2001	3,50E-13	3,33E-13	

 Tableau 5.14 : Données expérimentales et débits mesurés - mélange 90 % He – 10 % Ar à  $T = 298,15$  K.

Pour des conditions de pressions identiques, le débit massique des mélanges les plus concentrés en argon est plus élevé tandis que le nombre de Knudsen des mélanges les plus concentrés en hélium est plus grand, ceci étant essentiellement dû au fait que l'hélium est plus léger.

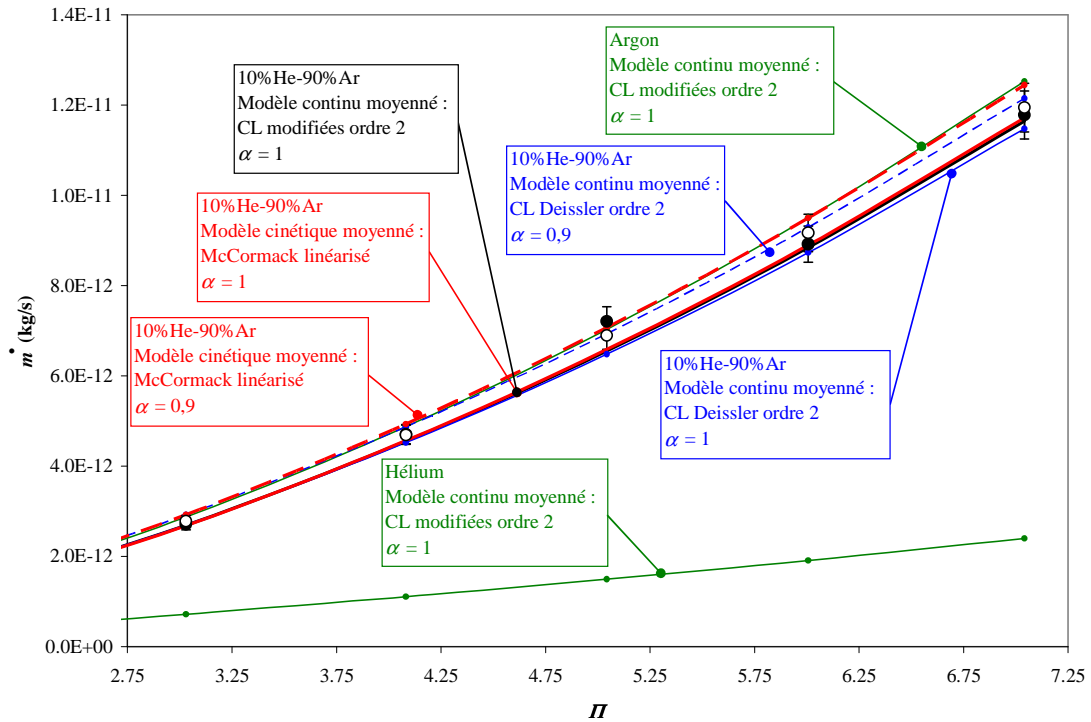
#### **5.4.2. Comparaison des données expérimentales avec les modèles moyennés**

Pour chaque mélange, les résultats du modèle continu moyenné avec conditions aux limites de Deissler ou modifiées, ainsi que du modèle McCormack linéarisé (modèle cinétique moyenné présenté dans la partie 5.2.4) sont présentés dans les figures qui suivent. Les résultats des calculs du modèle de Deissler pour chacun des gaz monoatomiques (argon et hélium) sont également tracés, à titre de comparaison. On présente en premier lieu (Figure 5.11 à Figure 5.20) les mesures correspondant à une raréfaction modérée, pour les pressions aval de 50 kPa et 15 kPa. On analysera par la suite (Figure 5.21 à Figure 5.25) les résultats obtenus pour une raréfaction plus poussée, à  $P_B = 2$  kPa .



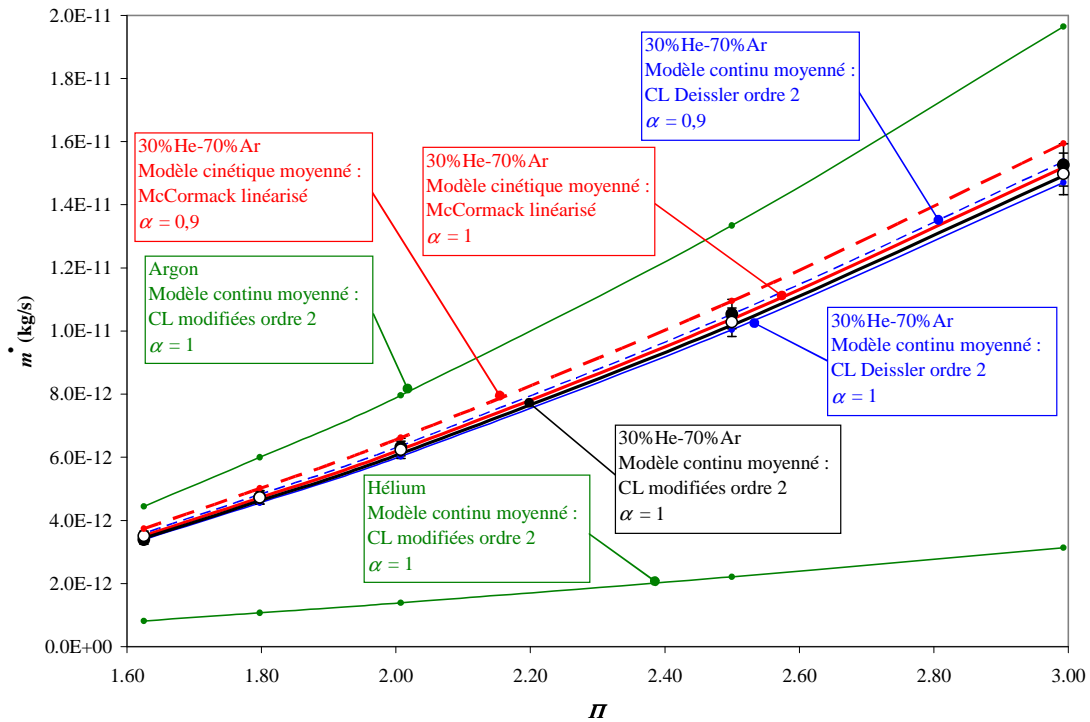
**Figure 5.11** : Débit massique en fonction du rapport de pression pour 10% He - 90% Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15\text{ K}$  ,  $P_B \approx 5 \times 10^4\text{ Pa}$  ,  $0,024 < Kn_0 < 0,036$  ,  $24,53 < \delta_0 < 36,93$  .

La Figure 5.11 est relative à un écoulement de 10% d'hélium et 90% d'argon. La concentration exacte d'hélium est  $(10,17 \pm 0,2)\%$  . La pression aval de l'écoulement est fixée à environ  $5 \times 10^4\text{ Pa}$  . La pression à l'amont est adaptée afin d'obtenir un rapport de pression allant de 1,4 à 2,6. Le nombre de Knudsen moyen et le paramètre de raréfaction moyen sont tels que  $0,024 < Kn_0 < 0,036$  et  $24,53 < \delta_0 < 36,92$  respectivement. Les courbes théoriques du mélange sont calculées à partir de la concentration exacte et du paramètre de raréfaction moyen précédemment donnés. Les points expérimentaux suivent parfaitement le modèle modifié et le modèle de McCormack avec  $\alpha = 1$  ainsi que le modèle de Deissler mais avec  $\alpha$  un peu inférieur à 1.



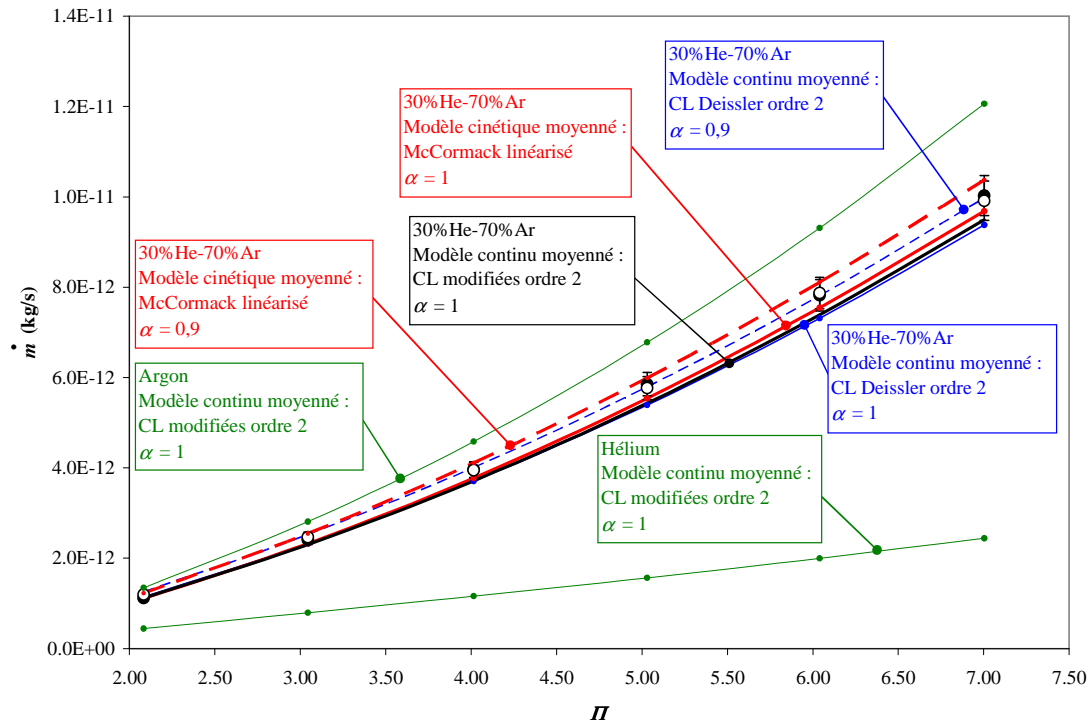
**Figure 5.12** : Débit massique en fonction du rapport de pression pour 10% He – 90% Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15\text{ K}$  ,  $P_B \approx 1,5 \times 10^4\text{ Pa}$  ,  $0,036 < Kn_0 < 0,095$  ,  $9,36 < \delta_0 < 24,85$  .

Afin d'augmenter le niveau de raréfaction, la série d'essais suivante a été réalisée avec une pression aval d'environ  $1,5 \times 10^4$  Pa pour le même mélange (Figure 5.12). Les rapports de pression varient de 3 à 7. Le nombre de Knudsen moyen et le paramètre de raréfaction moyen sont tels que  $0,036 < Kn_0 < 0,095$  et  $9,35 < \delta_0 < 24,85$  respectivement. Les résultats sont cohérents avec ceux des gaz simples présentés dans le paragraphe 5.2 : les trois modèles sont en accord avec les points expérimentaux pour une valeur de  $\alpha$  légèrement inférieure à 1.



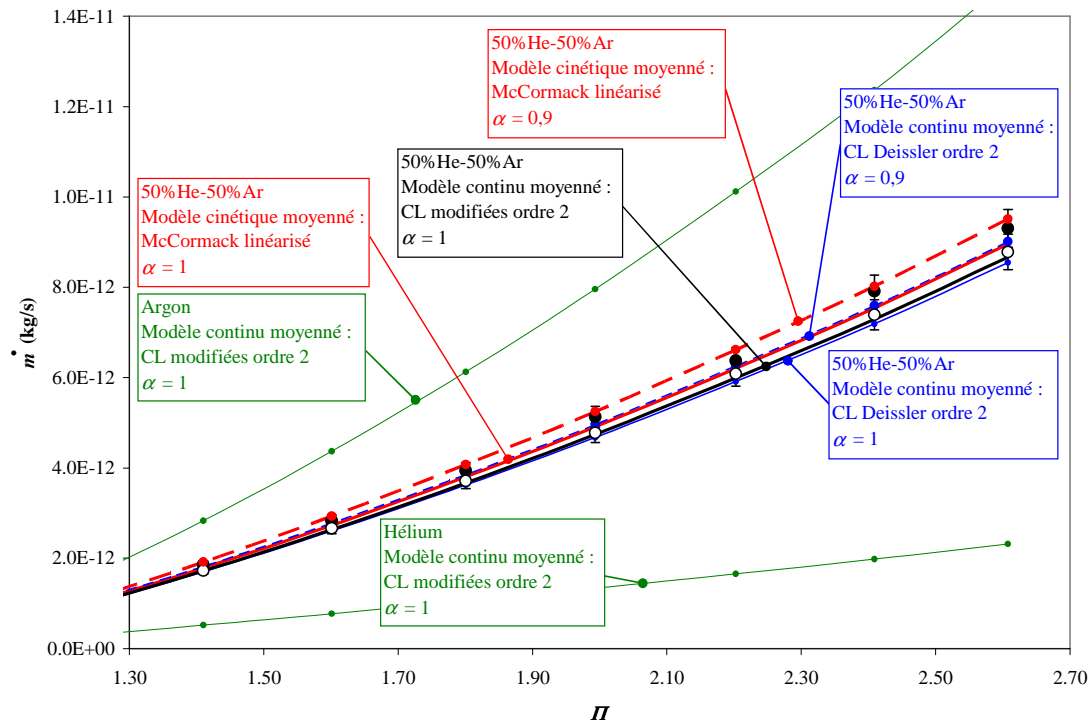
**Figure 5.13 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour 30% He - 70% Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15 \text{ K}$  ,  $P_B \approx 5 \times 10^4 \text{ Pa}$  ,  $0,025 < Kn_0 < 0,038$  ,  $12,77 < \delta_0 < 19,65$  .

La Figure 5.13 est relative à un écoulement de 30% d'hélium et 70% d'argon. La concentration exacte d'hélium est  $(30,12 \pm 0,6)\%$  . La pression aval est fixée à environ  $5 \times 10^4 \text{ Pa}$  . La pression à l'amont est adaptée afin d'obtenir un rapport de pression allant de 1,6 à 3. Le modèle de McCormack avec  $\alpha = 1$ , le modèle modifié avec  $\alpha$  un peu inférieur à 1 et le modèle de Deissler avec  $\alpha$  légèrement supérieur à 0,9 sont en excellent accord avec les résultats expérimentaux.



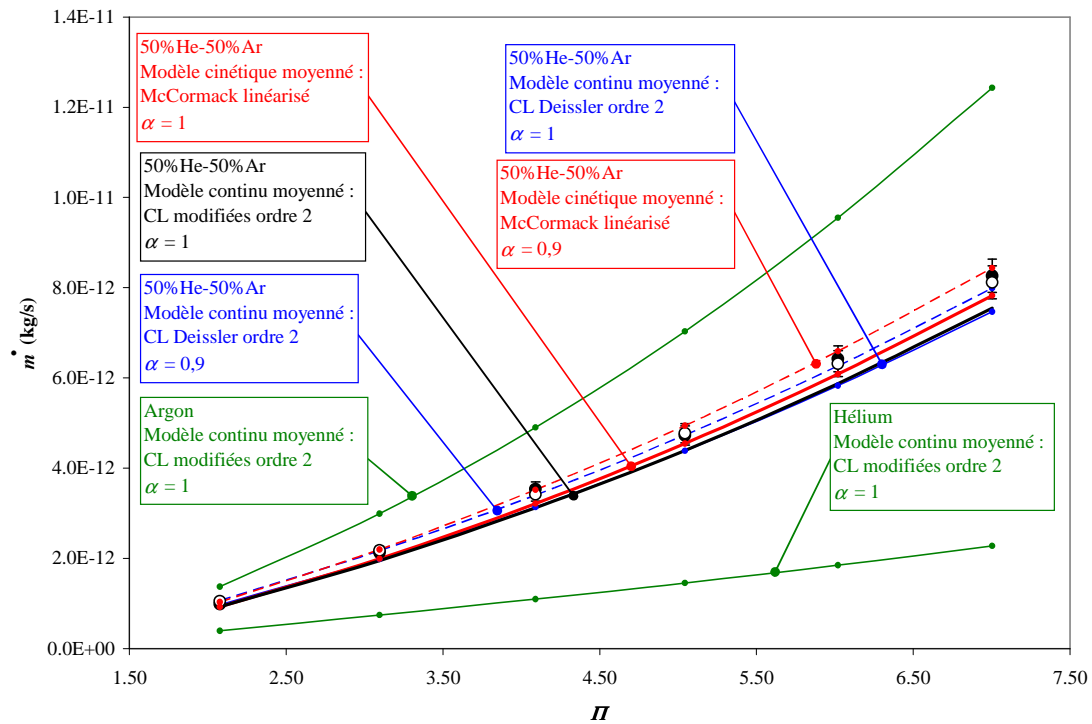
**Figure 5.14** : Débit massique en fonction du rapport de pression pour 30% He - 70% Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15\text{ K}$  ,  $P_B \approx 1,5 \times 10^4\text{ Pa}$  ,  $0,041 < Kn_0 < 0,106$  ,  $8,32 < \delta_0 < 21,63$  .

Afin d'augmenter le niveau de raréfaction, la série d'essai suivante a été réalisée avec le même mélange mais avec une pression aval de  $1,5 \times 10^4\text{ Pa}$  (voir Figure 5.14). La pression à l'amont est adaptée afin d'obtenir un rapport de pression allant de 2 à 7. Le nombre de Knudsen moyen et le paramètre de raréfaction moyen sont tels que  $0,041 < Kn_0 < 0,106$  et  $8,32 < \delta_0 < 21,63$  respectivement. Les différents modèles avec  $\alpha = 1$  sous-estiment très légèrement les résultats expérimentaux. L'accord théorie-expérience semble être bon avec une valeur  $0,9 < \alpha < 1$  pour le modèle de McCormack et avec  $\alpha = 0,9$  pour celui de Deissler.



**Figure 5.15** : Débit massique en fonction du rapport de pression pour 50% He – 50%Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15 \text{ K}$  ,  $P_B \approx 5 \times 10^4 \text{ Pa}$  ,  $0,032 < Kn_0 < 0,052$  ,  $17,08 < \delta_0 < 27,90$  .

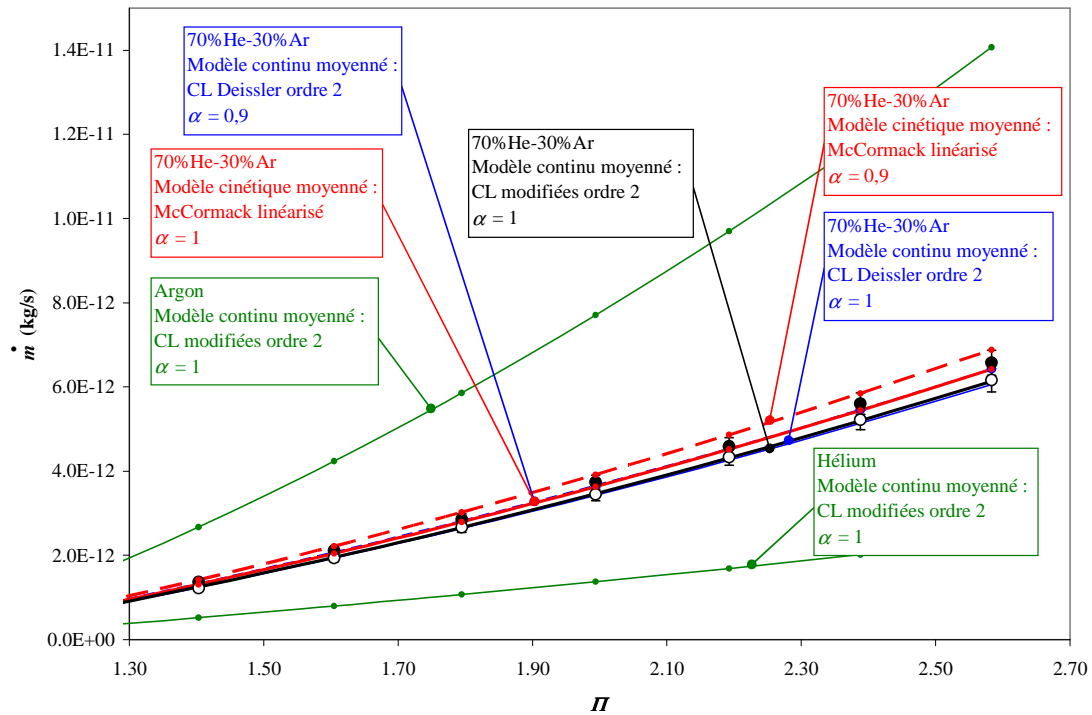
La Figure 5.15 est relative à un écoulement de 50% d'hélium et 50% d'argon. La concentration exacte d'argon est  $(49,9 \pm 1,0)\%$  . La pression à l'aval est fixée à environ  $5 \times 10^4 \text{ Pa}$  . La pression à l'amont est adaptée afin d'obtenir un rapport de pression allant de 1,3 à 2,6. Le nombre de Knudsen moyen et le paramètre de raréfaction moyen sont tels que  $0,032 < Kn_0 < 0,052$  et  $17,08 < \delta_0 < 27,90$  respectivement. Les résultats expérimentaux correspondant aux débits mesurés à l'amont et à l'aval s'écartent les uns des autres un peu plus que ce qui a été présenté pour les mélanges précédents. Les résultats expérimentaux suivent parfaitement le modèle de McCormack avec  $\alpha = 1$  . Des écarts plus importants entre le modèle de McCormack et les modèles de Deissler ou modifié sont observés vraisemblablement à cause de la raréfaction plus élevée que précédemment. Le modèle de Deissler avec  $\alpha = 1$  sous-estime légèrement les résultats expérimentaux mais il est en bon accord avec ceux-ci pour  $\alpha = 0,9$  .



**Figure 5.16 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour 50% He - 50% Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15\text{ K}$  ,  $P_B \approx 1,5 \times 10^4 \text{ Pa}$  ,  $0,048 < Kn_0 < 0,124$  ,  $7,14 < \delta_0 < 18,59$  .

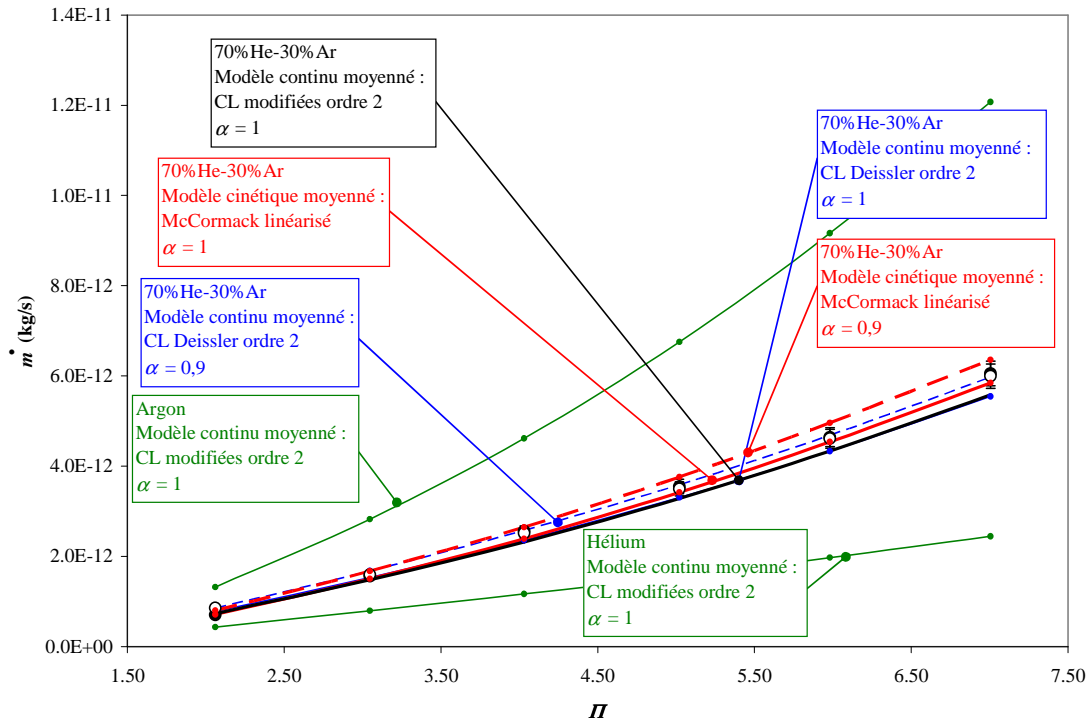
Afin d'augmenter encore le niveau de raréfaction, la série d'essais suivante a été réalisée avec le même mélange mais avec une pression aval de 15 kPa (voir Figure 5.16). La pression aval est adaptée afin d'obtenir un rapport de pression allant de 2 à 7. Le nombre de Knudsen moyen et le paramètre de raréfaction moyen sont tels que  $0,048 < Kn_0 < 0,124$  et  $7,14 < \delta_0 < 18,59$  . Les écarts entre les deux débits mesurés à l'amont et à l'aval sont faibles. Dans ce régime d'écoulement, les modèles basés sur une approche continue commencent à être moins précis. Le modèle cinétique est en accord avec les mesures pour  $0,9 < \alpha < 1$  .





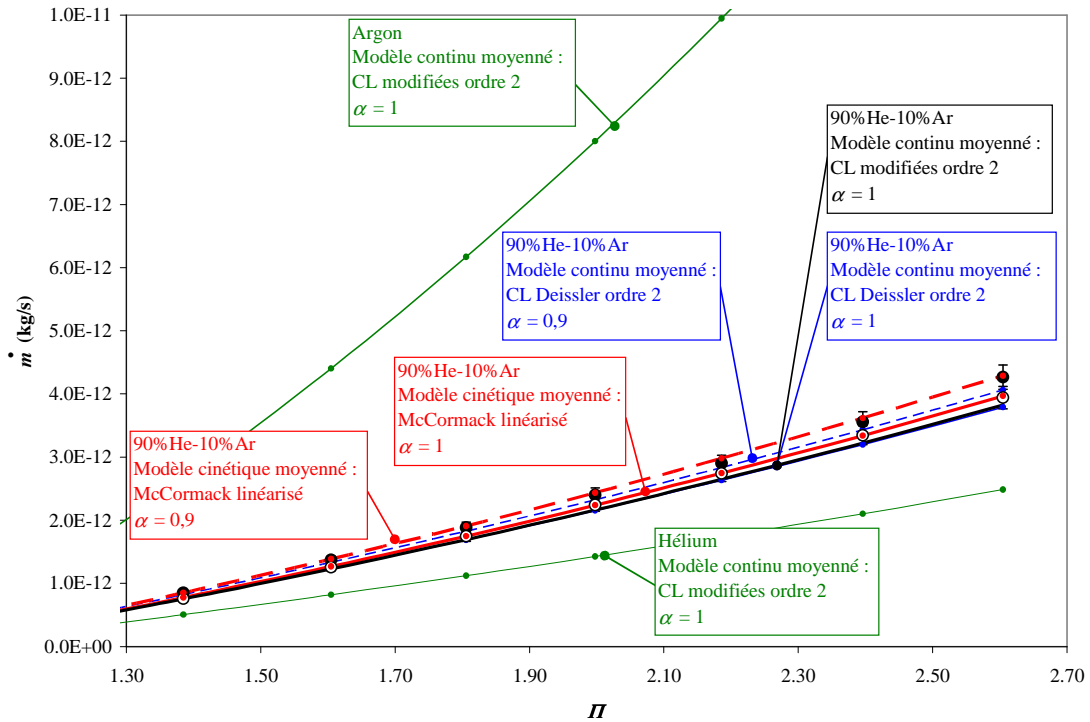
**Figure 5.17 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour 70% He - 30% Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15\text{ K}$  ,  $P_B \approx 5 \times 10^4\text{ Pa}$  ,  $0,039 < Kn_0 < 0,063$  ,  $14,00 < \delta_0 < 22,85$  .

La Figure 5.17 est relative à un écoulement de 70% d'hélium et 30% d'argon. La concentration exacte est  $(29,81 \pm 0,6)\%$  d'argon. La pression aval est maintenue à environ 50 kPa . La pression amont varie afin d'obtenir un rapport de pressions allant de 1,3 à 2,6. Le nombre de Knudsen et le paramètre de raréfaction moyens sont tels que  $0,039 < Kn_0 < 0,063$  et  $14,00 < \delta_0 < 22,85$ . Les points expérimentaux sont en bon accord avec le modèle modifié et le modèle de McCormack pour  $\alpha = 1$  et le modèle de Deissler pour  $\alpha = 0,9$  .



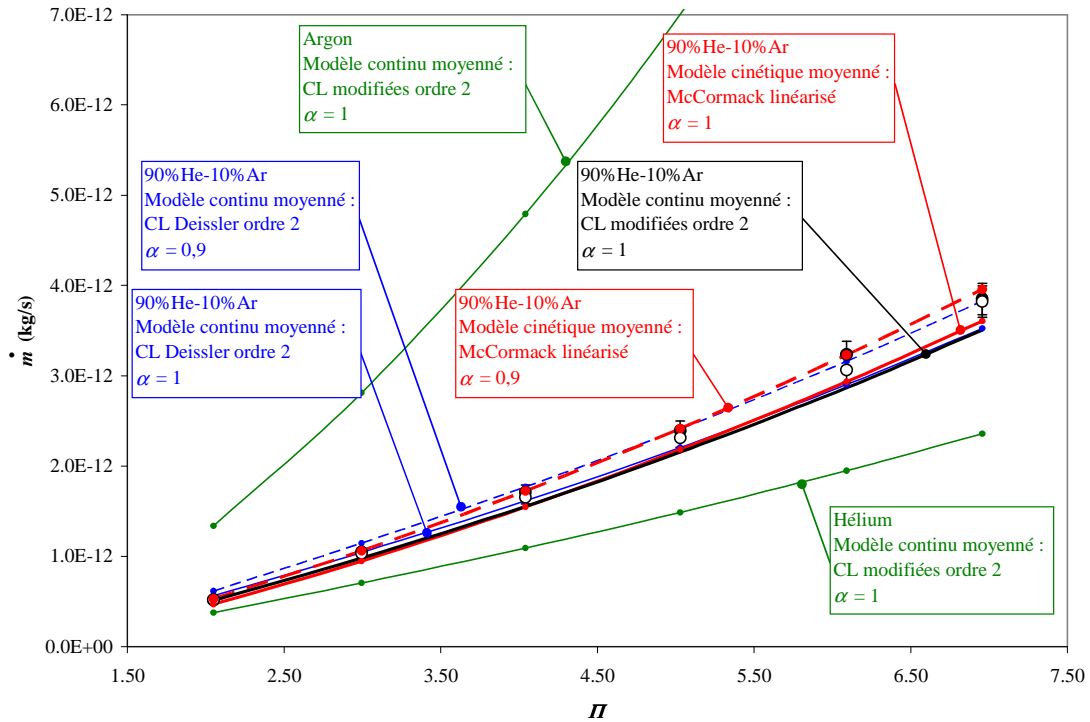
**Figure 5.18** : Débit massique en fonction du rapport de pression pour 70% He - 30% Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15\text{ K}$  ,  $P_B \approx 1,5 \times 10^4\text{ Pa}$  ,  $0,058 < Kn_0 < 0,151$  ,  $5,86 < \delta_0 < 15,32$  .

Afin d'augmenter encore le niveau de raréfaction, la série d'essais suivante a été réalisée avec le même mélange mais avec une pression aval de 15 kPa (voir Figure 5.18). La pression amont est adaptée afin d'obtenir un rapport de pressions allant de 2 à 7. Le nombre de Knudsen et le paramètre de raréfaction moyens sont tels que  $0,058 < Kn_0 < 0,151$  et  $5,86 < \delta_0 < 15,32$  . Les écarts entre les modèles basés sur une approche continue et le modèle de McCormack sont légèrement plus marqués pour ce niveau de raréfaction. Globalement, on peut tirer les mêmes conclusions que pour la figure précédente.



**Figure 5.19** : Débit massique en fonction du rapport de pression pour 90% He -10 % Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (●) et à la sortie (○) et les modèles cinétique et continus à  $T = 298,15 \text{ K}$  ,  $P_B \approx 5 \times 10^4 \text{ Pa}$  ,  $0,050 < Kn_0 < 0,082$  ,  $10,78 < \delta_0 < 17,61$  .

La Figure 5.19 est relative à un écoulement de 90% d'hélium et 10% d'argon. La concentration exacte d'argon est de  $(9,86 \pm 0,2)\%$  . La pression aval est maintenue à environ 50 kPa . La pression amont est adaptée afin d'obtenir un rapport de pression allant de 1,3 à 2,6. Le nombre de Knudsen moyen et le paramètre de raréfaction moyen sont tels que  $0,050 < Kn_0 < 0,082$  et  $10,78 < \delta_0 < 17,61$  . Le modèle cinétique avec  $\alpha=1$  et le modèle de Deissler avec  $\alpha=0,9$  sont en bon accord avec les débits expérimentaux mesurés à l'aval, lesquels sont un peu inférieurs à ceux mesurés à l'amont. Le modèle modifié prévoit quant à lui un débit très proche de celui du modèle de Deissler.



**Figure 5.20** : Débit massique en fonction du rapport de pression pour 90% He - 10% Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétique et continus à  $T = 298,15\text{ K}$  ,  $P_B \approx 1,5 \times 10^4\text{ Pa}$  ,  $0,076 < Kn_0 < 0,198$  ,  $4,48 < \delta_0 < 11,67$  .

Afin d'augmenter le niveau de raréfaction, la série d'essais suivante a été réalisée avec le même mélange mais avec une pression aval de 15 kPa (voir Figure 5.20). La pression amont est adaptée afin d'obtenir un rapport de pression allant de 2 à 7. Le nombre de Knudsen moyen et le paramètre de raréfaction moyen sont tels que  $0,076 < Kn_0 < 0,198$  et  $4,48 < \delta_0 < 11,67$ . Le modèle de McCormack linéarisé avec  $\alpha = 1$  sous-estime ici assez nettement les résultats expérimentaux qui semblent en bon accord avec la théorie cinétique, mais pour  $\alpha$  plus proche de 0,9 que de 1 ; différentes raisons peuvent expliquer ce phénomène :

- le calcul basé sur la valeur moyenne du paramètre de raréfaction peut conduire dans certaines plages de Knudsen à des erreurs significatives.
- le traitement des données expérimentales suppose que la vitesse des deux espèces chimiques soit identique dans le microcanal. Cette hypothèse est

discutée plus en détails en annexe. Néanmoins, une éventuelle correction des résultats expérimentaux en tenant compte d'un déséquilibre des vitesses entre les deux espèces n'irait vraisemblablement pas dans le sens de rapprocher théorie cinétique et expérience.

On s'intéresse maintenant aux expériences effectuées dans des régimes plus raréfiés. Les séries de mesures présentées sur les figures suivantes (Figure 5.21 à Figure 5.25) sont effectuées à une pression aval de 2000 Pa environ pour les mêmes mélanges que précédemment. Le rapport de pressions varie de 3 à 6,5. Le régime d'écoulement de ces séries de mesure est le régime de transition.

Les résultats des modèles continus ne sont plus valables dans ce régime. Seuls les résultats du modèle de McCormack linéarisé sont alors comparés aux données expérimentales.

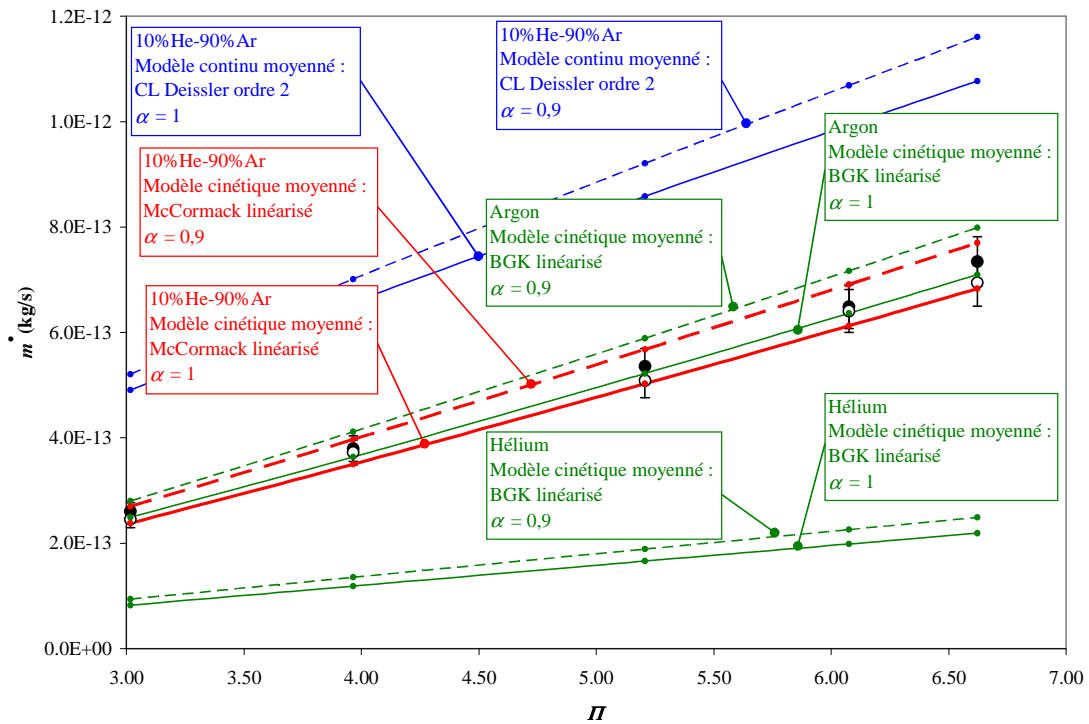
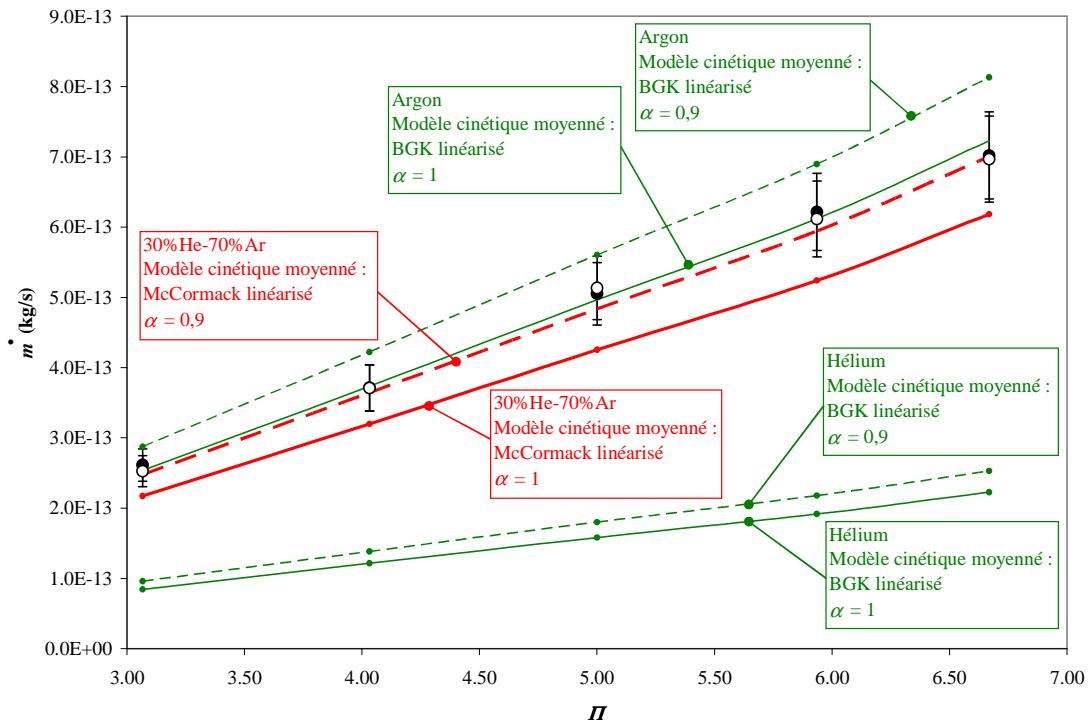


Figure 5.21 : Débit massique en fonction du rapport de pression pour 10% He - 90% Ar : comparaison entre données à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétiques et continus à  $T = 298,15 \text{ K}$ ,

$$P_b \approx 2 \times 10^3 \text{ Pa}, 0,282 < Kn_0 < 0,535, 1,66 < \delta_0 < 3,14.$$

Pour une faible proportion d'hélium (10%), la raréfaction demeure modérée. Le calcul de débit par le modèle de McCormack donne des résultats proches de ceux obtenus pour de l'argon pur (voir Figure 5.21), ce qui est cohérent avec tout ce qui a été observé jusqu'ici. Un bon accord est trouvé entre modèle cinétique et mesures expérimentales pour une valeur de  $\alpha$  un peu inférieure à 1. En revanche, les modèles continus ne sont plus du tout prédictifs à ce niveau de pression.



**Figure 5.22 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour 30% He - 70% Ar : comparaison entre données à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétiques à  $T = 298,15 \text{ K}$ ,  $P_b \approx 2 \times 10^3 \text{ Pa}$ ,  $0,318 < Kn_0 < 0,602$ ,  $1,47 < \delta_0 < 2,79$ .

La proportion d'hélium étant maintenant augmentée à 30%, la raréfaction est maintenant marquée (voir Figure 5.22). Le calcul de débit par le modèle de McCormack donne alors des résultats proches de l'expérience pour  $\alpha \approx 0,9$ , ce qui correspond au débit calculé pour de l'argon pur avec  $\alpha = 1$ .

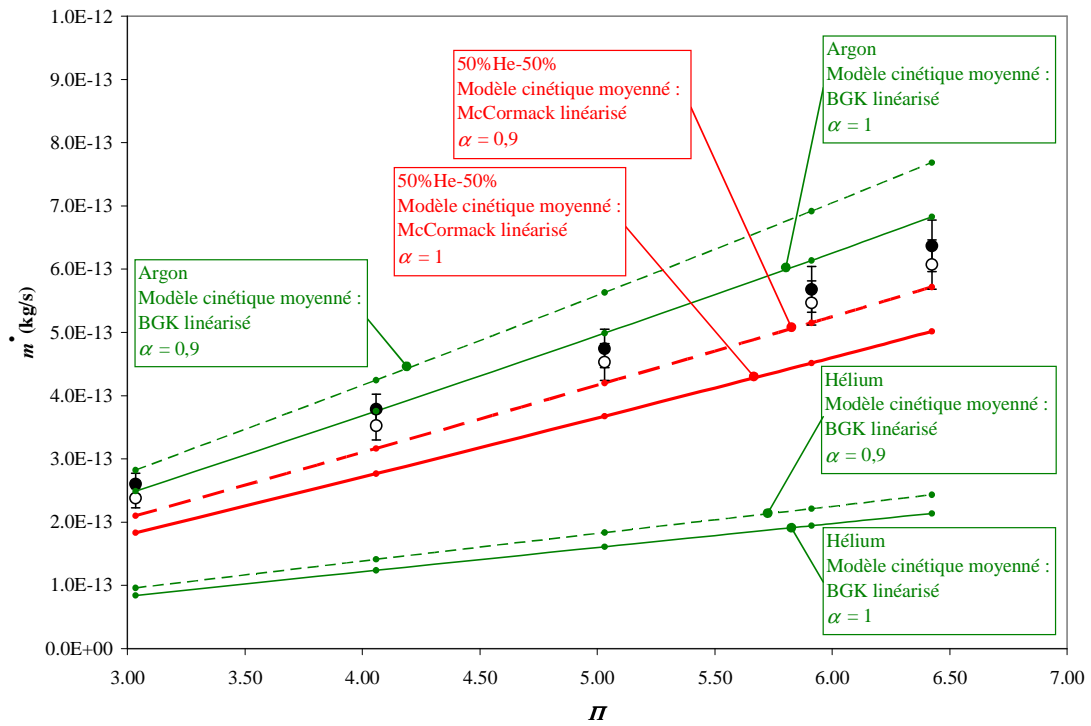


Figure 5.23 : Débit massique en fonction du rapport de pression pour 50% He - 50% Ar : comparaison entre données à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétiques à  $T = 298,15\text{ K}$ ,  $P_b \approx 2 \times 10^3\text{ Pa}$ ,

$$0,386 < Kn_0 < 0,710, 1,25 < \delta_0 < 2,30.$$



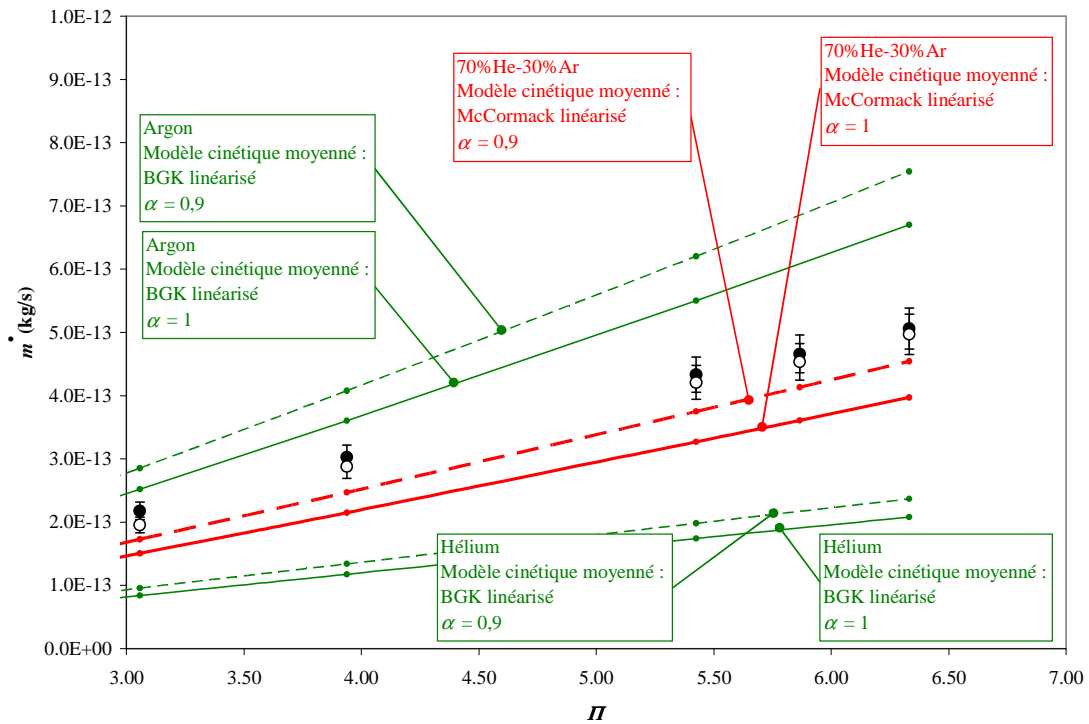
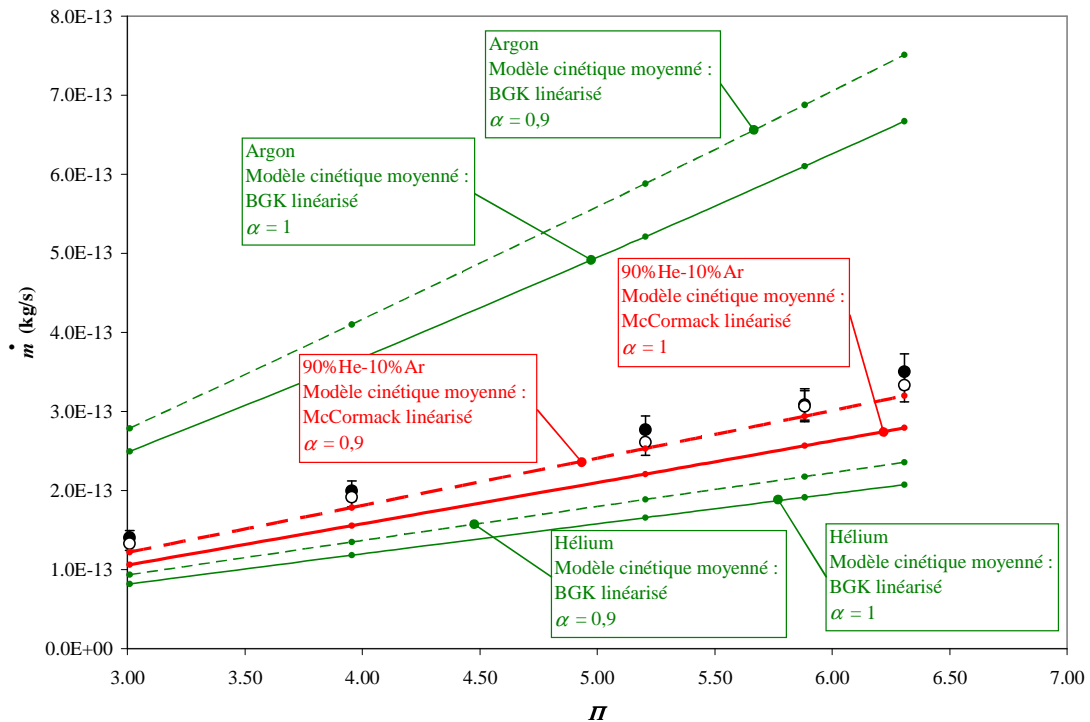


Figure 5.24 : Débit massique en fonction du rapport de pression pour 70% He - 30% Ar : comparaison entre données à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétiques à  $T = 298,15 \text{ K}$ ,  $P_B \approx 2 \times 10^3 \text{ Pa}$  ;

$$0,474 < Kn_0 < 0,856 ; 1,04 < \delta_0 < 1,87.$$

Ce phénomène s'accroît lorsque la proportion d'hélium augmente, à 50 % sur la Figure 5.23 et à 70 % sur la Figure 5.24, et que par la même occasion, la raréfaction est plus forte avec des nombres de Knudsen moyens aux alentours de 0,5. Le modèle de McCormack sous-estime assez nettement le débit expérimental, même pour des valeurs du coefficient d'accommodation égales à 0,9.



**Figure 5.25 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour 90% He - 10% Ar : comparaison entre données à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétiques à  $T = 298,15\text{ K}$ ,  $P_b \approx 2 \times 10^3\text{ Pa}$  ;  
 $0,621 < Kn_0 < 1,13$ ;  $0,78 < \delta_0 < 1,43$ .

La remarque reste valable pour une proportion de 90 % d'hélium (voir Figure 5.25).

### 5.4.3. Comparaison des données expérimentales avec les modèles continus et cinétique intégré

Afin de savoir si ce comportement peut être lié à la manière de calculer la valeur du coefficient  $G$ , on analyse sur un exemple (voir Figure 5.26) l'influence du type de moyenne en comparant débits obtenus par le modèle moyenné ou le modèle intégré. De la même manière, dans les régimes moins raréfiés, on compare les modèles continus moyennés et non moyennés. Les écarts relatifs entre les différents modèles et les mesures expérimentales sont également donnés dans les tableaux qui suivent.

Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux

10%He-90%Ar - $P_B = 50$ kPa , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
1,60	3,96E-12	4,12E-12	4,04E-12	4,02E-12	3,94E-12	3,94E-12	4,00E-12	4,00E-12
1,80	5,74E-12	5,76E-12	5,75E-12	5,73E-12	5,61E-12	5,61E-12	5,69E-12	5,69E-12
2,00	7,52E-12	7,52E-12	7,52E-12	7,48E-12	7,33E-12	7,33E-12	7,43E-12	7,43E-12
2,19	9,21E-12	9,21E-12	9,21E-12	9,32E-12	9,12E-12	9,13E-12	9,26E-12	9,26E-12
2,39	1,16E-11	1,12E-11	1,14E-11	1,14E-11	1,11E-11	1,11E-11	1,13E-11	1,13E-11
2,59	1,35E-11	1,34E-11	1,35E-11	1,35E-11	1,33E-11	1,33E-11	1,35E-11	1,35E-11

10%He-90%Ar - $P_B = 50$ kPa , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatifs par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
1,60	3,32E-02	-0,37	-2,45	-2,39	-1,06	-1,03
1,80	3,08E-02	-0,36	-2,45	-2,37	-1,04	-1,01
2,00	2,87E-02	-0,45	-2,55	-2,44	-1,13	-1,10
2,19	2,70E-02	1,18	-0,93	-0,81	0,51	0,52
2,39	2,54E-02	-0,14	-2,20	-2,07	-0,79	-0,78
2,59	2,40E-02	0,64	-1,40	-1,26	0,01	0,01
moyenne des points		0,08	-2,00	-1,89	-0,58	-0,56

10%He-90%Ar - $P_B = 15$ kPa , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,03	2,71E-12	2,78E-12	2,75E-12	2,68E-12	2,69E-12	2,72E-12	2,69E-12	2,71E-12
4,08	4,71E-12	4,69E-12	4,70E-12	4,56E-12	4,52E-12	4,58E-12	4,55E-12	4,59E-12
5,04	7,21E-12	6,89E-12	7,05E-12	6,58E-12	6,48E-12	6,56E-12	6,55E-12	6,60E-12
6,01	8,92E-12	9,17E-12	9,04E-12	8,90E-12	8,73E-12	8,84E-12	8,85E-12	8,91E-12
7,04	1,18E-11	1,19E-11	1,19E-11	1,17E-11	1,15E-11	1,16E-11	1,16E-11	1,17E-11

10%He-90%Ar - $P_B = 15$ kPa , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatifs par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,03	7,12E-02	-2,37	-1,90	-0,82	-2,05	-1,31
4,08	5,64E-02	-2,89	-3,81	-2,60	-3,12	-2,37
5,04	4,74E-02	-6,64	-8,11	-6,94	-7,12	-6,39
6,01	4,09E-02	-1,58	-3,44	-2,26	-2,18	-1,48
7,04	3,57E-02	-1,23	-3,25	-2,14	-1,86	-1,24
moyenne des points		-2,94	-4,10	-2,95	-3,27	-2,56

## Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux

10%He-90%Ar - $P_B = 2 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,02	2,60E-13	2,45E-13	2,53E-13	2,38E-13	4,61E-13	4,91E-13	3,56E-13	3,73E-13
3,96	3,79E-13	3,72E-13	3,76E-13	3,50E-13	6,03E-13	6,57E-13	4,83E-13	5,14E-13
5,21	5,36E-13	5,09E-13	5,22E-13	5,02E-13	7,72E-13	8,58E-13	6,42E-13	6,92E-13
6,08	6,49E-13	6,41E-13	6,45E-13	6,12E-13	8,85E-13	9,93E-13	7,52E-13	8,16E-13
6,62	7,34E-13	6,94E-13	7,14E-13	6,83E-13	9,55E-13	1,08E-12	8,22E-13	8,94E-13

10%He-90%Ar - $P_B = 2 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatif par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,02	5,35E-01	-5,77	82,49	94,09	40,83	47,63
3,96	4,33E-01	-6,89	60,54	74,83	28,45	36,82
5,21	3,46E-01	-3,78	47,80	64,33	22,92	32,60
6,08	3,04E-01	-5,01	37,24	54,05	16,70	26,54
6,62	2,82E-01	-4,38	33,72	50,77	15,12	25,10
moyenne des points		-5,17	52,36	67,61	24,81	33,74

**Tableau 5.15** : Débits massiques en fonction du rapport de pression pour 10% He -90 % Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'amont, à l'aval et modèles McCormack, de Deissler et modifié à  $T = 298,15 \text{ K}$ .

30%He-70%Ar - $P_B = 50 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
1,63	3,39E-12	3,51E-12	3,45E-12	3,51E-12	3,39E-12	3,39E-12	3,44E-12	3,44E-12
1,80	4,74E-12	4,73E-12	4,73E-12	4,72E-12	4,56E-12	4,57E-12	4,62E-12	4,63E-12
2,01	6,32E-12	6,24E-12	6,28E-12	6,24E-12	6,03E-12	6,04E-12	6,12E-12	6,12E-12
2,50	1,05E-11	1,03E-11	1,04E-11	1,04E-11	1,00E-11	1,01E-11	1,02E-11	1,02E-11
2,99	1,53E-11	1,50E-11	1,51E-11	1,52E-11	1,47E-11	1,47E-11	1,49E-11	1,49E-11

30%He-70%Ar - $P_B = 50 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatif par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
1,63	3,78E-02	1,65	-1,77	-1,69	-0,46	-0,38
1,80	3,52E-02	-0,23	-3,61	-3,51	-2,27	-2,19
2,01	3,28E-02	-0,56	-3,91	-3,78	-2,55	-2,47
2,50	2,80E-02	-0,29	-3,56	-3,39	-2,17	-2,10
2,99	2,46E-02	0,40	-2,75	-2,56	-1,37	-1,32
moyenne des points		0,19	-3,12	-2,99	-1,76	-1,69

## Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux

30%He-70%Ar - $P_B = 15$ kPa , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,04	2,41E-12	2,47E-12	2,44E-12	2,32E-12	2,32E-12	2,35E-12	2,30E-12	2,32E-12
4,01	3,96E-12	3,95E-12	3,95E-12	3,77E-12	3,71E-12	3,76E-12	3,71E-12	3,75E-12
5,03	5,85E-12	5,76E-12	5,81E-12	5,54E-12	5,39E-12	5,47E-12	5,43E-12	5,48E-12
6,04	7,82E-12	7,87E-12	7,85E-12	7,54E-12	7,31E-12	7,42E-12	7,39E-12	7,46E-12
7,00	1,00E-11	9,91E-12	9,97E-12	9,68E-12	9,38E-12	9,51E-12	9,50E-12	9,58E-12

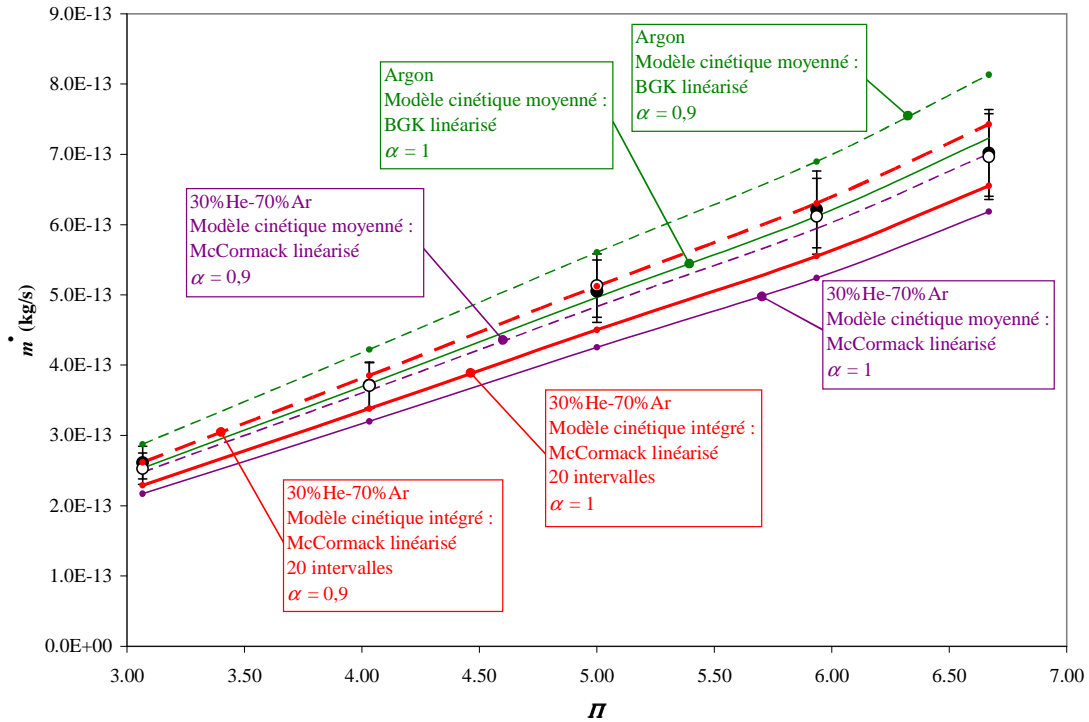
30%He-70%Ar - $P_B = 15$ kPa , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatifs par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack		Deissler		Modifié
		moyenné	intégré 20 intervalles	moyenné	-	moyenné
3,04	8,11E-02	-4,67	-4,71	-3,45	-5,51	-4,63
4,01	6,54E-02	-4,56	-6,27	-4,84	-6,12	-5,16
5,03	5,44E-02	-4,67	-7,23	-5,79	-6,55	-5,60
6,04	4,66E-02	-3,85	-6,85	-5,45	-5,82	-4,96
7,00	4,10E-02	-2,89	-5,94	-4,60	-4,75	-3,92
moyenne des points		-4,13	-6,20	-4,82	-5,75	-4,85

30%He-70%Ar - $P_B = 2$ kPa , $\alpha = 1$									
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)								
	Mesure			McCormack		Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	intégré 20 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
3,07	2,61E-13	2,53E-13	2,57E-13	2,17E-13	2,29E-13	4,56E-13	4,88E-13	3,45E-13	3,64E-13
4,03	3,72E-13	3,71E-13	3,71E-13	3,20E-13	3,38E-13	5,90E-13	6,47E-13	4,63E-13	4,96E-13
5,00	5,05E-13	5,13E-13	5,09E-13	4,25E-13	4,50E-13	7,10E-13	7,93E-13	5,74E-13	6,23E-13
5,94	6,22E-13	6,12E-13	6,17E-13	5,24E-13	5,55E-13	8,15E-13	9,22E-13	6,74E-13	7,37E-13
6,67	7,02E-13	6,97E-13	6,99E-13	6,18E-13	6,55E-13	9,08E-13	1,03E-12	7,66E-13	8,40E-13

30%He-70%Ar - $P_B = 2$ kPa , $\alpha = 1$							
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatifs par rapport aux débits mesurés moyens (%)					
		McCormack		Deissler		Modifié	
		moyenné	intégré 20 intervalles	moyenné	-	moyenné	-
3,07	6,02E-01	-15,50	-10,77	77,60	89,78	34,38	41,51
4,03	4,87E-01	-13,84	-8,86	59,00	74,31	24,68	33,64
5,00	4,08E-01	-16,46	-11,54	39,51	55,79	12,75	22,29
5,94	3,57E-01	-15,04	-9,99	32,17	49,58	9,32	19,52
6,67	3,18E-01	-11,58	-6,32	29,80	47,79	9,53	20,07
moyenne des points		-14,48	-9,50	47,61	63,45	18,13	27,41

**Tableau 5.16** : Débits massiques en fonction du rapport de pression pour 30% He -70 % Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'amont, à l'aval et modèles McCormack, de Deissler et modifié à

$T = 298,15$  K .



**Figure 5.26 :** Débit massique en fonction du rapport de pression pour 30% He - 70% Ar : comparaison entre données à l'entrée (●) et à la sortie (○) et modèles cinétiques à  $T = 298,15 \text{ K}$ ,  $P_B \approx 2 \times 10^3 \text{ Pa}$ ,  $0,318 < Kn_0 < 0,602$ ,  $1,47 < \delta_0 < 2,79$ .

La Figure 5.26 montre l'influence du type de moyenne effectué pour calculer le paramètre  $G$ . Elle représente graphiquement les données du Tableau 5.16, pour une pression aval de 2 kPa et des nombres de Knudsen moyens de l'ordre de 0,5. Les différences entre le modèle moyenné et le modèle intégré sont sensibles mais demeurent inférieures aux incertitudes expérimentales, confirmant un bon accord entre modèle cinétique et données expérimentales, mais pour un coefficient d'accommodation de 0,9 et non plus de 1, comme c'était le cas dans les régimes moins raréfiés.

Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux

50%He-50%Ar - $P_B = 50$ kPa , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
1,60	2,83E-12	2,66E-12	2,75E-12	2,73E-12	2,60E-12	2,61E-12	2,63E-12	2,64E-12
1,80	3,94E-12	3,71E-12	3,83E-12	3,80E-12	3,62E-12	3,63E-12	3,67E-12	3,67E-12
1,99	5,13E-12	4,78E-12	4,96E-12	4,91E-12	4,68E-12	4,68E-12	4,74E-12	4,74E-12
2,20	6,37E-12	6,09E-12	6,23E-12	6,20E-12	5,91E-12	5,93E-12	5,99E-12	6,00E-12
2,41	7,92E-12	7,39E-12	7,65E-12	7,54E-12	7,19E-12	7,21E-12	7,29E-12	7,30E-12
2,61	9,31E-12	8,78E-12	9,04E-12	8,96E-12	8,55E-12	8,57E-12	8,67E-12	8,68E-12

50%He-50%Ar - $P_B = 50$ kPa , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatifs par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
1,60	4,40E-02	-0,52	-5,15	-5,05	-4,04	-3,92
1,80	4,09E-02	-0,63	-5,31	-5,18	-4,11	-3,99
1,99	3,83E-02	-0,97	-5,64	-5,48	-4,39	-4,26
2,20	3,58E-02	-0,41	-5,08	-4,89	-3,79	-3,64
2,41	3,37E-02	-1,46	-6,05	-5,84	-4,71	-4,59
2,61	3,18E-02	-0,94	-5,49	-5,26	-4,15	-4,01
moyenne des points		-0,82	-5,45	-5,28	-4,20	-4,07

50%He-50%Ar - $P_B = 15$ kPa , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,10	2,13E-12	2,17E-12	2,15E-12	1,99E-12	1,99E-12	2,02E-12	1,95E-12	1,98E-12
4,09	3,54E-12	3,42E-12	3,48E-12	3,21E-12	3,13E-12	3,19E-12	3,12E-12	3,16E-12
5,04	4,73E-12	4,77E-12	4,75E-12	4,54E-12	4,38E-12	4,47E-12	4,39E-12	4,45E-12
6,02	6,42E-12	6,32E-12	6,37E-12	6,09E-12	5,83E-12	5,94E-12	5,87E-12	5,94E-12
7,00	8,26E-12	8,12E-12	8,19E-12	7,83E-12	7,47E-12	7,61E-12	7,55E-12	7,63E-12

50%He-50%Ar - $P_B = 15$ kPa , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatifs par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,10	9,32E-02	-7,52	-7,59	-6,08	-9,20	-8,12
4,09	7,50E-02	-7,66	-9,90	-8,20	-10,32	-9,16
5,04	6,32E-02	-4,35	-7,77	-5,98	-7,51	-6,35
6,02	5,44E-02	-4,46	-8,49	-6,75	-7,79	-6,70
7,00	4,77E-02	-4,46	-8,81	-7,15	-7,83	-6,82
moyenne des points		-5,69	-8,51	-6,83	-8,53	-7,43

## Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux

50%He-50%Ar - $P_B = 2 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,03	2,60E-13	2,38E-13	2,49E-13	1,83E-13	4,33E-13	4,63E-13	3,19E-13	3,37E-13
4,06	3,78E-13	3,53E-13	3,65E-13	2,77E-13	5,62E-13	6,21E-13	4,30E-13	4,64E-13
5,03	4,74E-13	4,53E-13	4,64E-13	3,67E-13	6,70E-13	7,54E-13	5,27E-13	5,77E-13
5,91	5,68E-13	5,47E-13	5,57E-13	4,52E-13	7,60E-13	8,68E-13	6,13E-13	6,76E-13
6,42	6,37E-13	6,07E-13	6,22E-13	5,02E-13	8,11E-13	9,32E-13	6,62E-13	7,33E-13

50%He-50%Ar - $P_B = 2 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatif par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,03	7,10E-01	-26,48	73,58	85,95	27,91	35,15
4,06	5,66E-01	-24,30	53,87	69,80	17,62	26,94
5,03	4,75E-01	-20,78	44,36	62,63	13,68	24,38
5,91	4,15E-01	-19,00	36,34	55,72	9,91	21,26
6,42	3,86E-01	-19,34	30,41	49,88	6,45	17,85
moyenne des points		-21,98	47,71	64,79	15,11	25,12

**Tableau 5.17** : Débits massiques en fonction du rapport de pression pour 50% He -50 % Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'amont, à l'aval et modèles McCormack, de Deissler et modifié à

$$T = 298,15 \text{ K} .$$

70%He-30%Ar - $P_B = 50 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
1,60	2,11E-12	1,93E-12	2,02E-12	2,05E-12	1,94E-12	1,94E-12	1,95E-12	1,95E-12
1,79	2,85E-12	2,67E-12	2,76E-12	2,79E-12	2,64E-12	2,64E-12	2,66E-12	2,67E-12
1,99	3,74E-12	3,45E-12	3,59E-12	3,63E-12	3,43E-12	3,43E-12	3,46E-12	3,47E-12
2,19	4,59E-12	4,33E-12	4,46E-12	4,52E-12	4,26E-12	4,27E-12	4,31E-12	4,32E-12
2,39	5,60E-12	5,22E-12	5,41E-12	5,45E-12	5,14E-12	5,15E-12	5,20E-12	5,21E-12
2,58	6,57E-12	6,16E-12	6,37E-12	6,42E-12	6,06E-12	6,08E-12	6,14E-12	6,15E-12

70%He-30%Ar - $P_B = 50 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatif par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
1,60	5,33E-02	1,07	-4,36	-4,23	-3,61	-3,42
1,79	4,97E-02	1,15	-4,44	-4,27	-3,53	-3,34
1,99	4,64E-02	0,98	-4,70	-4,48	-3,65	-3,47
2,19	4,35E-02	1,27	-4,48	-4,22	-3,35	-3,14
2,39	4,10E-02	0,65	-5,08	-4,79	-3,88	-3,67
2,58	3,88E-02	0,86	-4,87	-4,56	-3,61	-3,40
moyenne des points		1,00	-4,65	-4,42	-3,60	-3,41



## Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux

70%He-30%Ar - $P_B = 15 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,05	1,56E-12	1,59E-12	1,58E-12	1,50E-12	1,53E-12	1,56E-12	1,48E-12	1,50E-12
4,03	2,56E-12	2,52E-12	2,54E-12	2,39E-12	2,36E-12	2,42E-12	2,32E-12	2,36E-12
5,02	3,55E-12	3,50E-12	3,52E-12	3,42E-12	3,30E-12	3,39E-12	3,28E-12	3,34E-12
5,98	4,64E-12	4,61E-12	4,63E-12	4,53E-12	4,33E-12	4,44E-12	4,34E-12	4,41E-12
7,01	6,05E-12	6,00E-12	6,02E-12	5,84E-12	5,55E-12	5,68E-12	5,58E-12	5,66E-12

70%He-30%Ar - $P_B = 15 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatifs par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,05	1,14E-01	-4,76	-2,81	-0,84	-6,02	-4,64
4,03	9,21E-02	-5,76	-7,07	-4,83	-8,62	-7,11
5,02	7,70E-02	-2,94	-6,19	-3,81	-6,76	-5,19
5,98	6,63E-02	-1,98	-6,34	-3,98	-6,27	-4,74
7,01	5,78E-02	-3,01	-7,96	-5,72	-7,43	-6,02
moyenne des points		-3,69	-6,07	-3,84	-7,02	-5,54

70%He-30%Ar - $P_B = 2 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,06	2,18E-13	1,96E-13	2,07E-13	1,50E-13	4,09E-13	4,40E-13	2,93E-13	3,11E-13
3,94	3,03E-13	2,88E-13	2,95E-13	2,15E-13	5,08E-13	5,63E-13	3,75E-13	4,07E-13
5,42	4,33E-13	4,21E-13	4,27E-13	3,27E-13	6,48E-13	7,43E-13	4,99E-13	5,55E-13
5,87	4,66E-13	4,53E-13	4,60E-13	3,61E-13	6,86E-13	7,92E-13	5,34E-13	5,96E-13
6,33	5,06E-13	4,97E-13	5,02E-13	3,97E-13	7,24E-13	8,42E-13	5,71E-13	6,40E-13

70%He-30%Ar - $P_B = 2 \text{ kPa}$ , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatifs par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,06	8,56E-01	-27,27	97,68	112,77	41,61	50,45
3,94	7,04E-01	-27,16	72,25	90,72	27,11	37,93
5,42	5,41E-01	-23,40	51,82	73,97	16,96	29,93
5,87	5,06E-01	-21,51	49,18	72,26	16,22	29,73
6,33	4,74E-01	-20,87	44,41	67,93	13,77	27,54
moyenne des points		-24,04	63,07	83,53	23,13	35,12

**Tableau 5.18** : Débits massiques en fonction du rapport de pression pour 70% He -30% Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'amont, à l'aval et modèles McCormack, de Deissler et modifié à  $T = 298,15 \text{ K}$ .

Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux

90%He-10%Ar - $P_B = 50$ kPa , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
1,60	1,37E-12	1,26E-12	1,31E-12	1,27E-12	1,23E-12	1,23E-12	1,23E-12	1,23E-12
1,81	1,88E-12	1,75E-12	1,81E-12	1,75E-12	1,69E-12	1,69E-12	1,69E-12	1,70E-12
2,00	2,40E-12	2,24E-12	2,32E-12	2,24E-12	2,15E-12	2,16E-12	2,16E-12	2,17E-12
2,19	2,90E-12	2,74E-12	2,82E-12	2,75E-12	2,63E-12	2,64E-12	2,65E-12	2,66E-12
2,40	3,56E-12	3,35E-12	3,45E-12	3,34E-12	3,20E-12	3,21E-12	3,22E-12	3,23E-12
2,60	4,27E-12	3,94E-12	4,10E-12	3,97E-12	3,79E-12	3,81E-12	3,83E-12	3,84E-12

90%He-10%Ar - $P_B = 50$ kPa , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatifs par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
1,60	6,96E-02	-3,46	-6,33	-6,15	-6,46	-6,18
1,81	6,47E-02	-3,54	-6,87	-6,61	-6,71	-6,41
2,00	6,05E-02	-3,56	-7,22	-6,90	-6,85	-6,52
2,19	5,69E-02	-2,66	-6,62	-6,24	-6,07	-5,72
2,40	5,34E-02	-3,21	-7,36	-6,94	-6,64	-6,29
2,60	5,03E-02	-3,33	-7,63	-7,17	-6,77	-6,42
moyenne des points		-3,29	-7,01	-6,67	-6,58	-6,26

90%He-10%Ar - $P_B = 15$ kPa , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
2,99	1,05E-12	1,03E-12	1,04E-12	9,47E-13	1,04E-12	1,07E-12	9,80E-13	9,99E-13
4,04	1,71E-12	1,65E-12	1,68E-12	1,55E-12	1,61E-12	1,67E-12	1,55E-12	1,59E-12
5,03	2,39E-12	2,31E-12	2,35E-12	2,18E-12	2,20E-12	2,28E-12	2,15E-12	2,20E-12
6,09	3,24E-12	3,06E-12	3,15E-12	2,93E-12	2,90E-12	3,00E-12	2,87E-12	2,93E-12
6,96	3,85E-12	3,82E-12	3,84E-12	3,61E-12	3,52E-12	3,65E-12	3,51E-12	3,59E-12

90%He-10%Ar - $P_B = 15$ kPa , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatifs par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
2,99	1,52E-01	-8,91	0,41	3,07	-5,70	-3,91
4,04	1,20E-01	-8,02	-4,05	-0,87	-7,64	-5,56
5,03	1,00E-01	-7,30	-6,33	-2,99	-8,45	-6,29
6,09	8,53E-02	-6,93	-7,97	-4,65	-9,05	-6,92
6,96	7,60E-02	-6,00	-8,14	-4,89	-8,63	-6,56
moyenne des points		-7,43	-5,22	-2,06	-7,89	-5,85

## Analyse expérimentale et théorique d'écoulements gazeux dans des microcanaux

90%He-10%Ar - $P_b = 2$ kPa , $\alpha = 1$								
Rapport de pression	Débit Massique (kg/s)							
	Mesure			McCormack	Deissler		Modifié	
	amont	aval	moyenne	moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,01	1,40E-13	1,33E-13	1,36E-13	1,06E-13	3,53E-13	3,81E-13	2,43E-13	2,60E-13
3,95	2,00E-13	1,92E-13	1,96E-13	1,55E-13	4,41E-13	4,93E-13	3,13E-13	3,43E-13
5,20	2,77E-13	2,61E-13	2,69E-13	2,21E-13	5,35E-13	6,18E-13	3,92E-13	4,41E-13
5,88	3,09E-13	3,07E-13	3,08E-13	2,57E-13	5,80E-13	6,79E-13	4,32E-13	4,91E-13
6,31	3,50E-13	3,33E-13	3,42E-13	2,79E-13	6,06E-13	7,16E-13	4,56E-13	5,21E-13

90%He-10%Ar - $P_b = 2$ kPa , $\alpha = 1$						
Rapport de pression	$Kn_0$	Ecart relatif par rapport aux débits mesurés moyens (%)				
		McCormack	Deissler		Modifié	
		moyenné	moyenné	-	moyenné	-
3,01	1,13E+00	-22,21	158,55	179,09	78,30	90,32
3,95	9,16E-01	-20,56	125,70	151,98	60,13	75,52
5,20	7,31E-01	-17,89	98,96	129,83	45,94	64,02
5,88	6,59E-01	-16,55	88,39	120,78	40,48	59,45
6,31	6,21E-01	-18,26	77,32	109,44	33,51	52,32
moyenne des points		-19,09	109,78	138,22	51,67	68,33

**Tableau 5.19** : Débits massiques en fonction du rapport de pression pour 90% He -10% Ar : comparaison entre résultats expérimentaux à l'amont, à l'aval et modèles McCormack, de Deissler et modifié à  $T = 298,15$  K .

Sur l'ensemble des données fournies par les tableaux ci-dessus, on constate que quelle que soit la proportion du mélange, l'utilisation de modèles continus non moyennés (avec conditions aux limites de Deissler ou modifiées) donne un meilleur accord avec les points expérimentaux que les modèles continus moyennés, tant que le régime demeure moyennement raréfié, c'est-à-dire pour des pressions aval de 50 kPa ou de 15 kPa. Ce n'est plus le cas pour une pression aval de 2 kPa, mais dans ce cas, les modèles continus ne présentent plus d'intérêt.

## Conclusions

Les expériences menées sur les écoulements d'argon, d'hélium et de leurs mélanges à différentes concentrations conduisent à plusieurs conclusions :

1. Pour les deux gaz simples, les débits mesurés dans les régimes d'écoulement glissant et de transition sont cohérents avec les modèles théoriques qui s'avèrent précis, pour un coefficient d'accommodation proche de l'unité. Si l'on suppose que ce coefficient est indépendant du niveau de raréfaction, les modèles continus restent très précis jusqu'à des nombres de Knudsen moyens de l'ordre de 0,1, le modèle modifié étant meilleur que le modèle de Deissler pour les valeurs de  $Kn_0$  les plus élevées.
2. Pour les mélanges des deux gaz, on peut tirer globalement les mêmes conclusions. La limite  $Kn_0 < 0,1$  d'applicabilité des modèles continus n'est qu'indicative, car cela dépend également du rapport des pressions amont sur aval, et donc du nombre de Knudsen maximal observé à l'aval. Lorsque la raréfaction augmente, on constate, à la différence de ce qui est observé en gaz monoatomique, que l'accord entre modèle cinétique et mesure ne reste très bon qu'à condition de diminuer le coefficient d'accommodation, en le faisant passer de la valeur 1 à une valeur proche de 0,9. Ce phénomène n'est pas encore clairement expliqué. Nous proposons dans les conclusions générales et perspectives différentes pistes pour comprendre ce phénomène.

### Références Bibliographiques

- [1] Lalonde, P. (2001). "Etude expérimentale d'écoulements gazeux dans les micosystèmes à fluides," Thèse de Doctorat. Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse.
- [2] Aubert, C., and Colin, S. (2001). "High-order boundary conditions for gaseous flows in rectangular microchannels " *Microscale Thermophysical Engineering*, 5(1), 41-54.
- [3] Kalelkar, A. S., and Kestin, L. (1970). "Viscosity of He-Ar and He-Kr binary gaseous mixtures in the temperature range 25-720°C" *Journal of Chemical Physics*, 52(8), 4248-4261.
- [4] Ewart, T., Perrier, P., Graur, I. A., and Méolans, J. G. (2007). "Mass flow rate measurements in a microchannel, from hydrodynamic to near free molecular regimes." *Journal of Fluid Mechanics*, 584, 337-356.

# Conclusions et perspectives

Notre travail de thèse a porté sur l'étude des écoulements de gaz au sein de microcanaux, depuis le régime continu jusqu'au régime de transition. On s'est essentiellement intéressé aux limites de l'approche continue lorsque la raréfaction augmente et qu'on passe du régime glissant au régime de transition. Notre principale contribution a porté sur les points suivants :

1. Concernant l'approche continue en régime glissant, le modèle analytique d'Aubert et Colin développé pour les microcanaux de section rectangulaire a été adapté à des conditions aux limites d'ordre 2 différentes de celles de Deissler. Le modèle de Wang, développé pour les microcanaux de section triangulaire équilatérale avec des conditions aux limites d'ordre 1, a été étendu à des conditions aux limites d'ordre 2.
2. Pour d'autres types de sections de forme plus complexes, pour lesquelles une solution analytique n'est plus possible, on peut utiliser un code de calcul commercial tel que Fluent. On a étudié sur ce code l'implémentation de conditions aux limites de glissement et on a notamment proposé une méthode de traitement (appelée MW) de ces conditions aux limites, qui s'est avérée plus flexible et plus performante que la méthode LPBS de Fluent. Cette méthode a permis de traiter le cas de microcanaux de sections triangulaires isocèles ou trapézoïdales et de prendre en compte correctement les conditions de glissement dans les angles aigus des sections.
3. Ces modèles continus ont été confrontés à une approche cinétique : on a ainsi utilisé des modèles basés sur l'équation de Boltzmann linéarisée. Le terme de collision est traité par un modèle BGK pour les gaz simples et un modèle de McCormack pour les mélanges binaires. La procédure de calcul numérique utilise la méthode des vitesses discrètes mise en œuvre par l'équipe du Professeur Valougeorgis à Volos. Les limites

de l'approche continue, en termes de niveau de raréfaction, ont été clairement mises en évidence.

4. Nous avons conçu un nouveau banc d'essais pour la mesure de microdébits gazeux. Ce banc d'essais a repris le principe de mesure (appelé DG) développé précédemment par Lalonde et a été enrichi par une méthode complémentaire (dite VC) comparable à celle proposée par Ewart *et al.* Les deux méthodes sont utilisables simultanément à l'amont et à l'aval du microsystème testé, doublant ainsi la mesure et garantissant sa précision. Les problèmes de fuites présents sur le banc précédent ont été éliminés, permettant ainsi des mesures à plus basse pression. En contrepartie, ces dernières sont sujettes à des problèmes de dégazage. On a alors proposé une procédure spécifique pour mesurer précisément ce dégazage et le prendre en compte dans le calcul du débit traversant le microsystème.
5. A l'aide de ce banc, des mesures de microdébits de gaz simples (hélium et argon) et de leurs mélanges à différentes concentrations ont été comparées aux modèles précédents. Pour les gaz simples, les résultats numériques sont en excellent accord avec les données expérimentales, pour un coefficient d'accommodation  $\alpha = 1$  qui correspond à un rebond diffus des molécules en paroi. Les modèles continus commencent à devenir imprécis pour des nombres de Knudsen moyens de l'ordre de 0,1, mais le modèle cinétique est performant sur toute la plage étudiée, jusqu'à  $Kn_0 = 1,5$ . En ce qui concerne les mélanges, les conclusions sont similaires, mais lorsque le nombre de Knudsen moyen devient supérieur à 0,1, l'accord reste bon à condition de diminuer le coefficient d'accommodation qui est alors de l'ordre de 0,9 pour  $Kn_0$  proche de 1. La prise en compte d'une éventuelle différence de vitesses entre les espèces chimiques dans le microcanal est discutée, à la fois sur le plan du traitement des données expérimentales et de la simulation numérique. Cette première analyse, qu'il reste à compléter, n'explique pas le phénomène précédemment décrit.

Nous concluons en évoquant l'avenir. Les perspectives et prolongements de notre travail sont nombreux. Les actions qui nous semblent les plus urgentes à mener seront les suivantes :

- tester l'implémentation de conditions aux limites plus précises dans la couche de Knudsen, comme celles proposées par Lockerby *et al.* et les utiliser dans Fluent sur différentes sections de microcanaux. Le développement d'un outil pour l'utilisation automatique dans Fluent de la méthode MW pourrait être très utile pour les ingénieurs développant des systèmes microfluidiques.

- analyser de façon systématique d'autres mélanges, ou d'autres gaz avec des molécules plus complexes que les gaz monoatomiques.

- étendre notre étude à d'autres microcanaux, de sections rectangulaires, triangulaires et trapézoïdales, gravés selon différents procédés pouvant conduire à des états de surfaces variés.

- analyser de façon systématique l'influence de la température, tout en restant dans un premier temps isotherme.

- effectuer des essais sur des canalisations de diamètres hydrauliques différents, afin de retrouver les mêmes nombres de Knudsen, mais pour des niveaux de pression et de dégazage différents.

- améliorer la précision de la méthode expérimentale DG basée sur le suivi de gouttes, pour la mettre en œuvre de manière plus systématique, parallèlement à la méthode VC essentiellement utilisée dans notre travail.

- prendre en compte dans les modèles cinétiques l'évolution réelle du paramètre de raréfaction le long de la conduite. Ce travail a déjà été engagé.





## **LISTE DES PUBLICATIONS**

- Pitakarnnop, J., Geoffroy, S., Colin, S., and Baldas, L. (2006). "Slip flow in triangular and trapezoidal microchannels." in *Proceedings on CDROM of 3rd French Microfluidics Conference ( $\mu$ Flu'06)*, Toulouse, France: SHF  $\mu$ Flu2006-71:1-12.
- Pitakarnnop, J., Colin, S., Baldas, L. and Geoffroy, S. (2007). "Slip flow in microchannels: numerical simulation with a commercial CFD code." in *Proceedings of First French-Chinese Symposium on Microfluidics (1FCSM)*, Beijing, China, 23-24.
- Pitakarnnop, J., Geoffroy, S., Colin, S., and Baldas, L. (2008). "Slip flow in triangular and trapezoidal microchannels." *International Journal of Heat and Technology*, 26(1), 167-174.
- Pitakarnnop, J., Varoutis, S., Valougeorgis, D., Geoffroy, S., Laurien, N., and Colin, S. (2008). "New experimental setup for accurate measurement of gas microflows." in *Proceedings on CDROM of the 1st European Conference on Microfluidics*, Bologna, Italy: SHF  $\mu$ Flu2008-167:1-15.
- Pitakarnnop, J., Varoutis, S., Valougeorgis, D., Geoffroy, S., Baldas, L., and Colin, S. (2009). "A novel experimental setup for gas microflows." *Microfluidics and Nanofluidics*, Springer:10.1007/s10404-009-0447-0.



**ANNEXE 1**

**COMPLEMENTS  
SUR LA MISE EN OEUVRE  
DE FLUENT  
POUR LA SIMULATION  
D'ÉCOULEMENTS GAZEUX  
EN MICROCANAU**

## A1.1. Gambit, préprocesseur de Fluent

Gambit est le logiciel de CAO utilisé pour créer la géométrie du cas traité (surface 2D pour un écoulement plan et volume 3D pour un écoulement au sein d'un microcanal) et le maillage associé. Dans notre cas, un maillage structuré est nécessaire pour les cellules proches de la paroi afin de simplifier le calcul du gradient de vitesse.

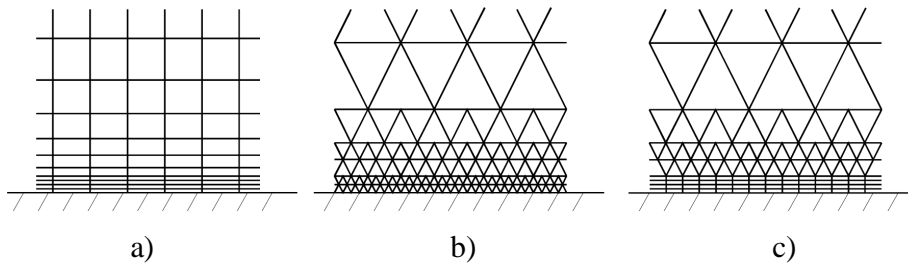


Figure A1.1: Les différents types de maillage [1] :

a) Maillage structuré

b) Maillage non-structuré

c) Maillage hybride.

## A1.2. Réglages des boîtes de dialogue Fluent

Une fois la géométrie et le maillage créés dans Gambit, on les importe dans Fluent. La première chose à faire est de vérifier le maillage en utilisant l'option **check** se trouvant dans le menu **GRID**. Pour choisir l'échelle du modèle, il faut utiliser l'option **scale** dans le même menu.

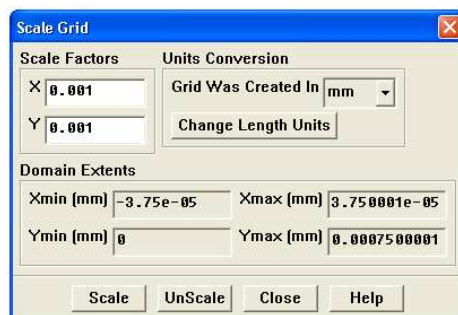


Figure A1.2 : Boîte de dialogue « échelle de maillage ».

Note : pour éviter les erreurs numériques quand vous diminuez l'échelle du modèle à des dimensions micrométriques (voir Figure A1.2), il faut initialement créer le modèle le plus petit possible.

La prochaine étape concerne le choix du modèle visqueux dans le menu *Define* > *Models* > *Viscous*. La Figure A1.3 présente les différents réglages de ce modèle.

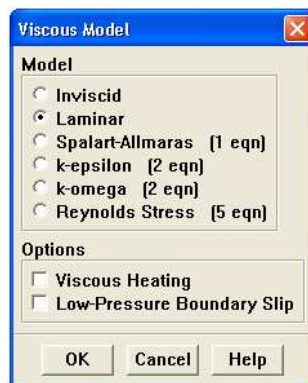
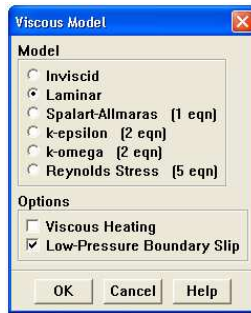


Figure A1.3 : Réglages de la boîte de dialogue « modèle de viscosité ».

Le modèle de viscosité choisi dans nos cas d'études est le modèle laminaire. La simulation numérique d'écoulements glissants est directement réalisable dans Fluent en choisissant l'option *Low-Pressure Boundary Slip* (LPBS). Par contre, pour utiliser la méthode Moving Wall (MW) que nous proposons dans cette thèse, l'option *Low-Pressure Boundary Slip* doit être désactivée. A partir de ce niveau, les réglages des deux méthodes sont différents, ils sont présentés séparément, étape par étape, dans les paragraphes suivants.

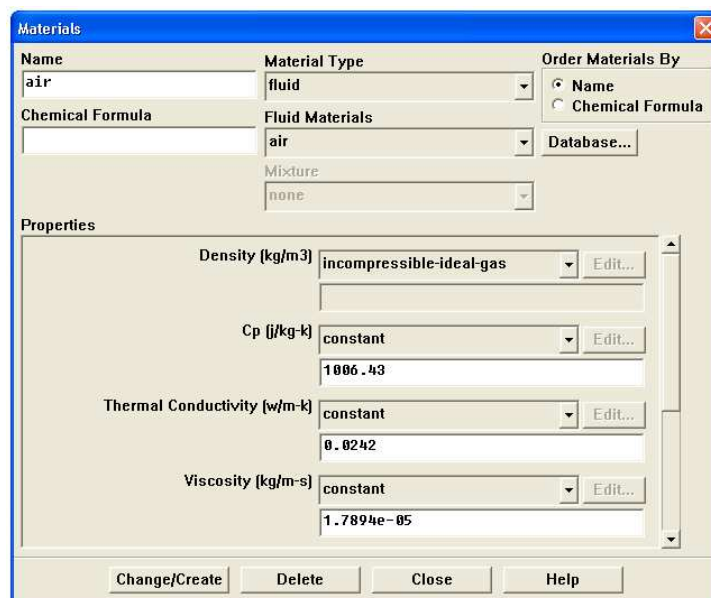
### A1.2.1. Simulation par la méthode LPBS

1. Comme dit précédemment, la méthode LPBS est sélectionnée avec l'option *Low-Pressure Boundary Slip* dans la boîte de dialogue « modèle de viscosité ».



**Figure A1.4 :** Réglages de la boîte de dialogue « modèle de viscosité » avec l’option Low-Pressure boundary slip sélectionnée.

2. La prochaine étape consiste à définir les propriétés du gaz utilisé dans la simulation. Les propriétés du gaz ainsi que les coefficients d’accommodation sont définis dans la boîte de dialogue «matériaux » se trouvant dans le menu **Define > Materials** .



**Figure A1.5 :** Boîte de dialogue « matériaux ».

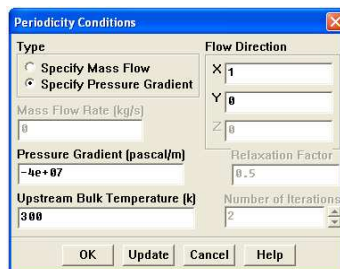
3. La pression de référence est définie dans la boîte de dialogue **Define > Operating Conditions**.

4. Pour simuler un écoulement localement pleinement développé, une condition périodique est utilisée entre l’entrée et la sortie. Pour créer cette condition aux limites, on

entre *Modify-zones/make periodic* dans la ligne de commande de Fluent. Cette condition périodique peut également être créée dans Gambit.

5. Les autres conditions aux limites sont réglées dans le sous-menu *Boundary Conditions* présent dans le menu *Define*.

6. Le gradient de pression est défini dans la boîte de dialogue « condition périodique » que se trouve dans le menu *Define* > *Periodicity Conditions*.



*Figure A1.6* : Boîte de dialogue « conditions périodiques ».

7. Après une initialisation du modèle numérique (*Solve* > *Initialize* > *Initialize*), une simulation est lancée avec le menu *Solve* > *Iterate*.

### **A1.2.2. Simulation par la méthode MW**

1. En premier lieu, l'option *Low-Pressure Boundary Slip* dans la boîte de dialogue « modèle de viscosité » doit être désactivée.

2. La prochaine étape consiste à entrer les propriétés du gaz dans la boîte de dialogue « propriétés matériaux ». Contrairement à la méthode LPBS, le champ concernant les coefficients d'accommodation n'est pas disponible. Ils seront définis directement dans la condition aux limites de vitesse glissante présentée par la suite.

3. La définition de la condition aux limites de glissement à la paroi est effectuée dans le menu *Custom Field Function Calculator* (Figure A1.7) situé dans le menu *Define*.

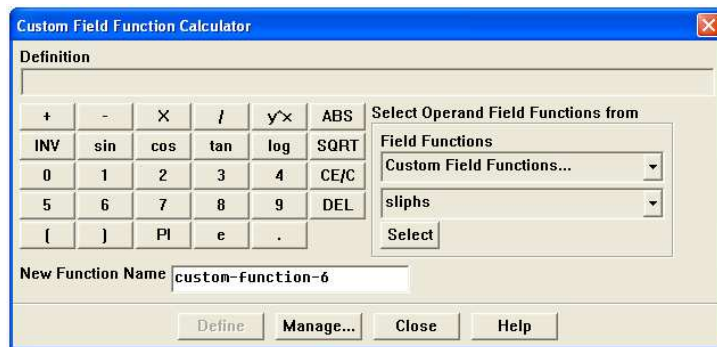


Figure A1.7 : Boîte de dialogue “Custom Field Function Calculator”.

La condition de vitesse de glissement présentée dans le chapitre 2 est définie dans cette boîte de dialogue.

4. La pression de référence, la condition périodique et le gradient de pression sont définis comme dans la méthode LPBS.

5. Après une initialisation du modèle numérique (*Solve* > *Initialize*), la première itération d'écoulement non-glissant est lancée par *Solve* > *Iterate*.

6. Une fois cette première itération réalisée, on peut exporter le profil de vitesse grâce à la boîte de dialogue *Boundary Profiles* se trouvant dans le menu *Define* > *Profiles*.

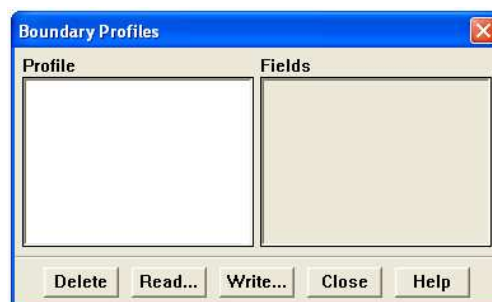


Figure A1.8 : Boîte de dialogue « Boundary Profiles ».



Il faut alors sélectionner l'option **Write** qui permet d'accéder à la boîte de dialogue **Write Profile**.

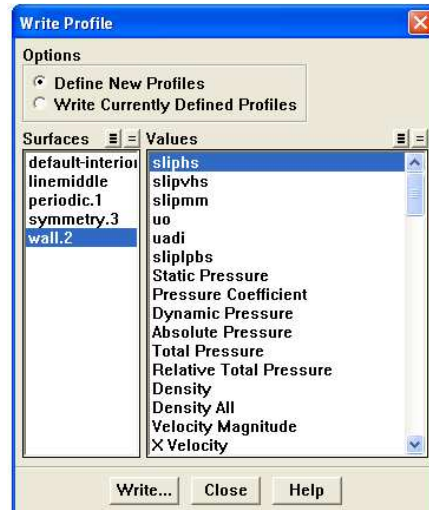


Figure A1.9 : Boîte de dialogue "Write Profile".

Il faut ensuite sélectionner la paroi ainsi que la condition aux limites définie dans l'étape 3 puis cliquer sur **Write** pour exporter le profil de vitesse de glissement relatif à la paroi sélectionnée.

7. Ce profil de vitesse est ensuite utilisé pour l'itération suivante et il est lu grâce au menu « Read » de la boîte de dialogue **Boundary Profiles**.

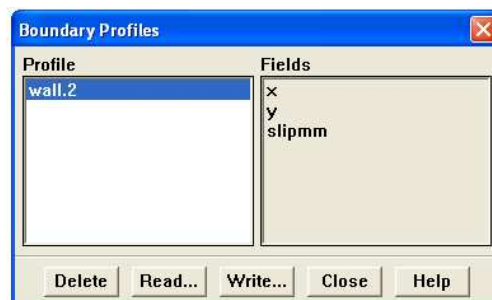


Figure A1.10 : Boîte de dialogue « Boundary Profiles ».

8. Pour appliquer ce profil à la paroi, il faut aller dans la boîte de dialogue *Boundary Conditions* se trouvant dans le menu *Define Boundary > Conditions*.

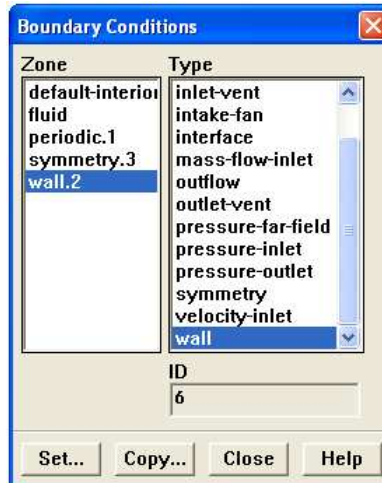


Figure A1.11 : Boîte de dialogue « Boundary Conditions ».

On sélectionne alors la paroi souhaitée et on clique sur l'option *Set* pour ouvrir la boîte de dialogue *Wall*.

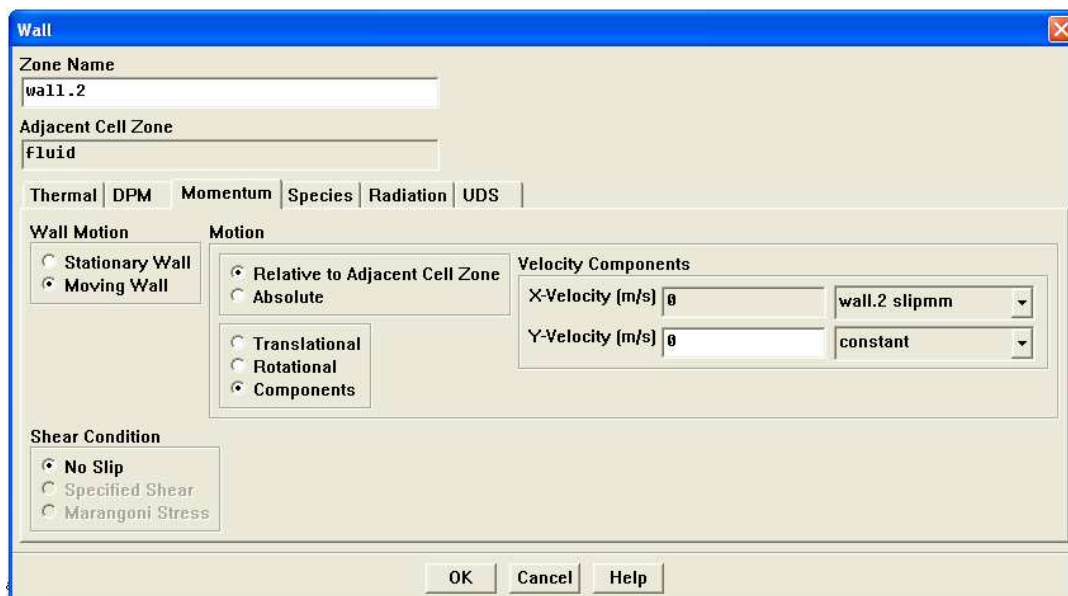


Figure A1.12 : Boîte de dialogue « Wall ».

On sélectionne alors l'onglet *Momentum*, et dans l'option *Velocity Components*, on rentre dans la composante longitudinale de la vitesse le profil de vitesse qui a été entré dans l'étape 7.

9. On relance la simulation (menu *Solve > Iterate*).

21. Les étapes 6 à 9 doivent être répétées jusqu'à ce que le profil de vitesse de glissement à la paroi soit obtenu.

### **Références Bibliographiques**

[1] Anduze, M. (2000). "Etude expérimentale et numérique de microécoulements liquides dans les microsystèmes fluidiques," Thèse de Doctorat. Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse.



**ANNEXE 2**

**CALCULS  
COMPLEMENTAIRES**

## A2.1. Ecoulement dans les canaux de section triangulaire équilatérale

A partir de l'expression de la vitesse dans un microcanal de section triangulaire équilatérale proposée par Wang [1]

$$u_z^* = -\frac{1}{4}(x^{*2} + y^{*2}) + A^* + B^*(x^{*3} - 3x^* y^{*2}), \quad (\text{A2.1})$$

nous avons étendu la solution à des conditions aux limites du second ordre inspirées de celles de Hadjiconstantinou (suite aux calculs de Cercignani) [2], de la forme

$$u_z^* \Big|_{\Gamma} \Big|_{\text{glis.}} = C_{1\lambda}^* \frac{\partial u_z^*}{\partial n^*} \Big|_{\Gamma} - C_{2\lambda}^* \left[ \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial n^{*2}} \Big|_{\Gamma} + \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial t^{*2}} \Big|_{\Gamma} \right] \quad (\text{A2.2})$$

où  $C_{1\lambda}^* = C_1 \frac{\lambda}{L}$  et  $C_{2\lambda}^* = C_2 \frac{\lambda^2}{L^2}$ , et où  $n$  et  $t$  sont les directions normale et transversale à la paroi. Ainsi, la vitesse de glissement à la paroi  $x^* = 1$  s'écrit

$$u_z^* \Big|_{x^*=1} \Big|_{\text{glis.}} = -C_{1\lambda}^* \frac{\partial u_z^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} - C_{2\lambda}^* \left[ \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial x^{*2}} \Big|_{x^*=1} + \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial y^{*2}} \Big|_{x^*=1} \right] \quad (\text{A2.3})$$

A partir des équations (A2.1) et (A2.3), on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} - \frac{y^{*2}}{4} + A^* + B^* - 3B^* y^{*2} - \frac{C_{1\lambda}^*}{2} + 3B^* C_{1\lambda}^* \\ - 3B^* C_{1\lambda}^* y^{*2} - C_{2\lambda}^* = 0. \end{aligned} \quad (\text{A2.4})$$

En  $y^* = 0$ , l'équation (A2.4) donne

$$A^* = \frac{1}{4} - (1 + 3C_{1\lambda}^*) B^* + \frac{C_{1\lambda}^*}{2} + C_{2\lambda}^* \quad (\text{A2.5})$$

et en  $y^* = \sqrt{3}$ ,

$$A^* - 1 - 8B^* - \frac{C_{1\lambda}^*}{2} - 6B^* C_{1\lambda}^* - C_{2\lambda}^* = 0. \quad (\text{A2.6})$$

A partir des équations (A2.5) et (A2.6), on obtient les coefficients  $A^*$  et  $B^*$

$$A^* = \frac{2 + 6C_{1\lambda}^* + 6C_{2\lambda}^* + 6C_{1\lambda}^* C_{2\lambda}^* + 3C_{1\lambda}^{*2}}{6(1 + C_{1\lambda}^*)} \quad (\text{A2.7})$$

et

$$B^* = -\frac{1}{12(1 + C_{1\lambda}^*)}. \quad (\text{A2.8})$$

et on en déduit à l'aide de l'équation (A2.1) la vitesse adimensionnelle dans un microcanal de section triangulaire équilatérale avec des conditions aux limites d'ordre 2.

## A2.2. Calcul du débit massique dans un microcanal par les modèles cinétiques

Les calculs de débit massique par une approche cinétique présentés dans le chapitre 3 sont basés sur une valeur moyenne de  $\delta$  au centre du microcanal. Le chapitre 5 montre d'autres méthodes de calculs moyennés basées sur une intégration de  $G(\delta)$  sur l'intervalle  $\delta \in [\delta_o, \delta_i]$  (équations (5.18) et (5.19) pour les gaz simples et (5.23) pour les mélanges binaires). Ces méthodes ne prenant pas en compte la variation du gradient de pression le long du microcanal, nous proposons de pallier à cet inconvénient par une technique similaire à celle proposée par Aubert et Colin [3].

L'équation (5.19) peut également s'écrire :

$$\dot{m} = G(\delta) \frac{D_H (H B)}{\xi} \frac{dP}{dz}, \quad (\text{A2.9})$$

où l'on propose de remplacer  $G(\delta)$  par un fit polynomial :

$$G(\delta) = b_0 + b_1\delta + b_2\delta^2 + b_3\delta^3 + b_4\delta^4 + b_5\delta^5 + b_6\delta^6 \quad (\text{A2.10})$$

La meilleure précision est obtenue avec un fit polynomial de degré 6, sauf dans le régime continu où un polynôme de degré 3 suffit (voir tableau A2.1). Les équations (A2.9) et (A2.10) conduisent alors à

$$\dot{m} = \frac{D_H (H B)}{\xi} \frac{dP}{dz} (b_0 + b_1 \delta + b_2 \delta^2 + b_3 \delta^3 + b_4 \delta^4 + b_5 \delta^5 + b_6 \delta^6). \quad (\text{A2.11})$$

En écoulement permanent isotherme, le rapport  $P/\delta$  est constant le long du microcanal, ce qui revient à écrire

$$\frac{P}{\delta} = \frac{P_o}{\delta_o} \quad (\text{A2.12})$$

où l'indice  $o$  représente les conditions aux limites à la sortie du microcanal. Ainsi, l'équation (A2.11) devient

$$\dot{m} = \frac{D_H (H B)}{\xi} \frac{dP}{dz} \left( b_0 + b_1 \delta_o \frac{P}{P_o} + b_2 \delta_o^2 \left( \frac{P}{P_o} \right)^2 + b_3 \delta_o^3 \left( \frac{P}{P_o} \right)^3 + b_4 \delta_o^4 \left( \frac{P}{P_o} \right)^4 + b_5 \delta_o^5 \left( \frac{P}{P_o} \right)^5 + b_6 \delta_o^6 \left( \frac{P}{P_o} \right)^6 \right). \quad (\text{A2.13})$$

Après intégration de l'équation (A2.13) le long du microcanal, on obtient

$$\dot{m} = \frac{D_H (H B)}{\xi} \frac{P_o}{L} \left( b_0 (\Pi - 1) + b_1 \frac{\delta_o}{2} (\Pi^2 - 1) + b_2 \frac{\delta_o^2}{3} (\Pi^3 - 1) + b_3 \frac{\delta_o^3}{4} (\Pi^4 - 1) + b_4 \frac{\delta_o^4}{5} (\Pi^5 - 1) + b_5 \frac{\delta_o^5}{6} (\Pi^6 - 1) + b_6 \frac{\delta_o^6}{7} (\Pi^7 - 1) \right) \quad (\text{A2.14})$$

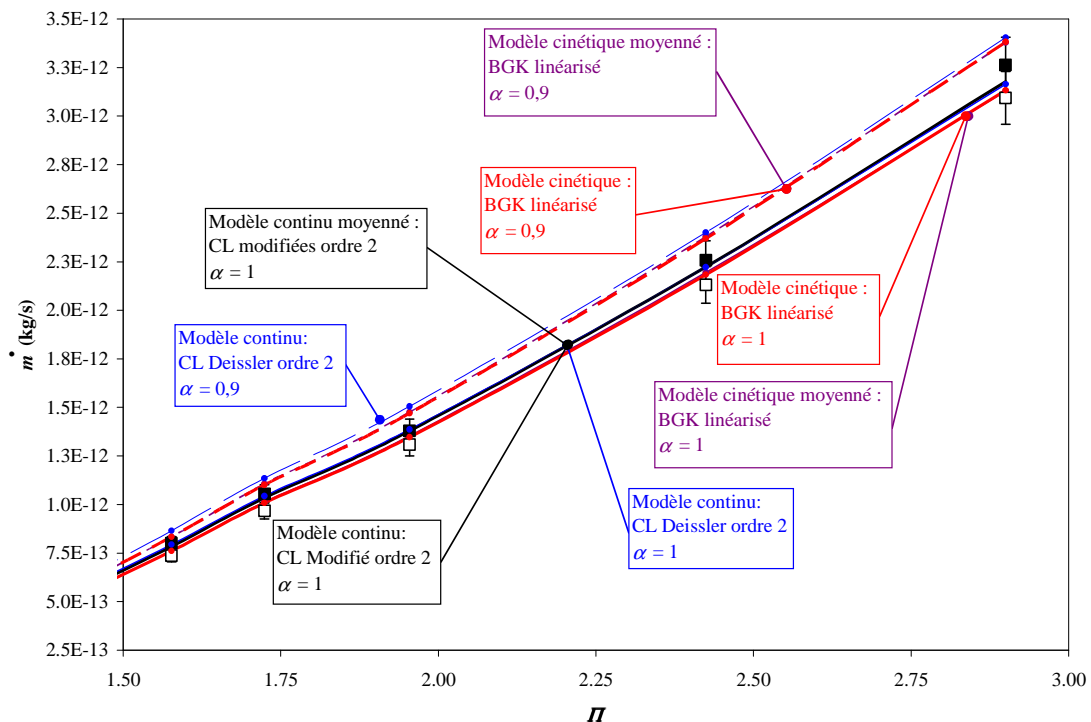
où  $\Pi = \frac{P_i}{P_o}$  représente le rapport des pressions à l'entrée et à la sortie et où  $L$  est la longueur du microcanal. Le tableau A2.1 donne les valeurs des coefficients en fonction de  $\alpha$  pour les microcanaux M2 utilisés dans cette thèse.

$\delta$	$\alpha$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$
0.2 - 7	0.9	1.097E+00	-3.715E-01	2.521E-01	-8.502E-02	1.557E-02	-1.445E-03	5.312E-05
	1	9.516E-01	-3.037E-01	2.070E-01	-6.927E-02	1.264E-02	-1.170E-03	4.295E-05
7 - 65	0.9	7.207E-01	4.387E-02	2.717E-05	-	-	-	-
	1	6.209E-01	4.357E-02	2.994E-05	-	-	-	-

**Tableau A2.1:** Coefficients du fit polynomial de  $G(\delta)$  en fonction de  $\alpha$  pour  $a^* = 0.089$ .



Les figures suivantes présentent une comparaison des débits massiques d'hélium obtenus à partir des résultats expérimentaux avec ceux obtenus à partir des calculs moyennés et à partir des modèles continus (voir Figure A2.1, Figure A2.2 et Figure A2.3 à  $P_B = 50$  kPa,  $P_B = 15$  kPa et  $P_B = 2$  kPa respectivement). La méthode proposée ci-dessus est notée : « **Modèle cinétique moyenné: BGK linéarisé** ».

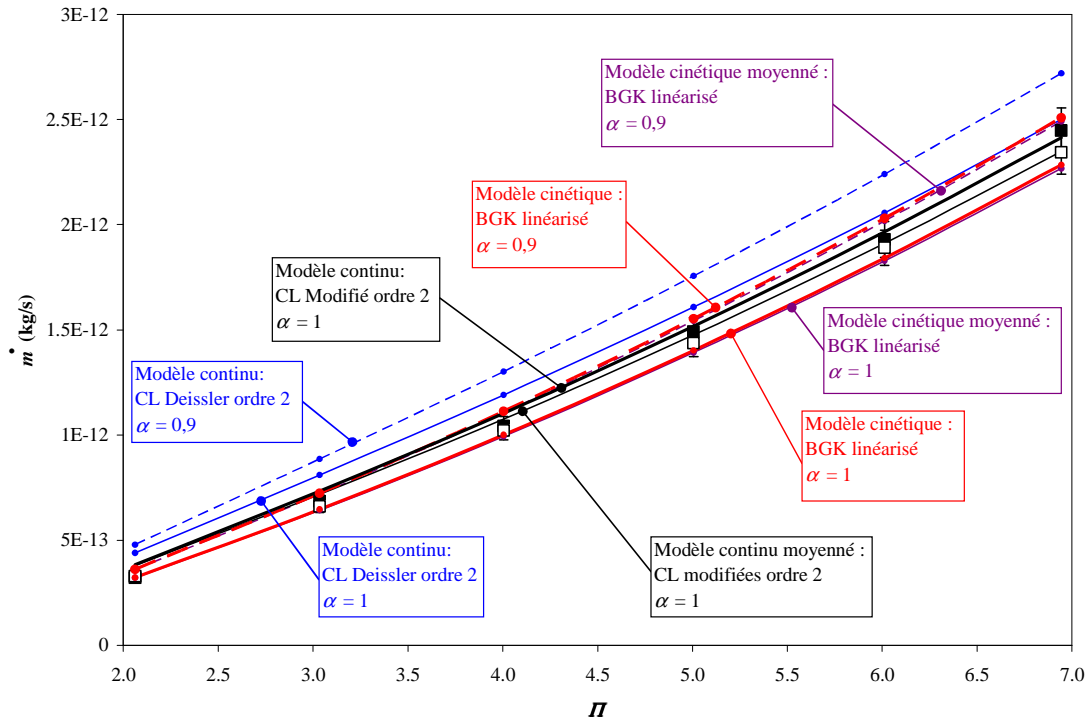


**Figure A2.1** : Débit massique en fonction du rapport de pression pour l'hélium : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (■) et à la sortie (□) et modèles cinétiques et continus à  $T = 298,15$  K ,

$$P_B \approx 5 \times 10^4 \text{ Pa} , 0,057 < Kn_0 < 0,088 , 10,11 < \delta_0 < 15,6 .$$

Les résultats de la Figure A2.1 sont relatifs à un écoulement d'hélium avec des rapports de pression  $1,6 < \Pi < 2,9$  et un nombre de Knudsen moyen  $0,057 < Kn_0 < 0,088$ . Dans cette plage, les écarts du modèle moyenné « **Modèle cinétique moyenné: BGK linéarisé** » avec les modèles tenant compte de l'évolution de  $Kn$  et du gradient de pression le long du canal « **Modèle cinétique: BGK linéarisé** »

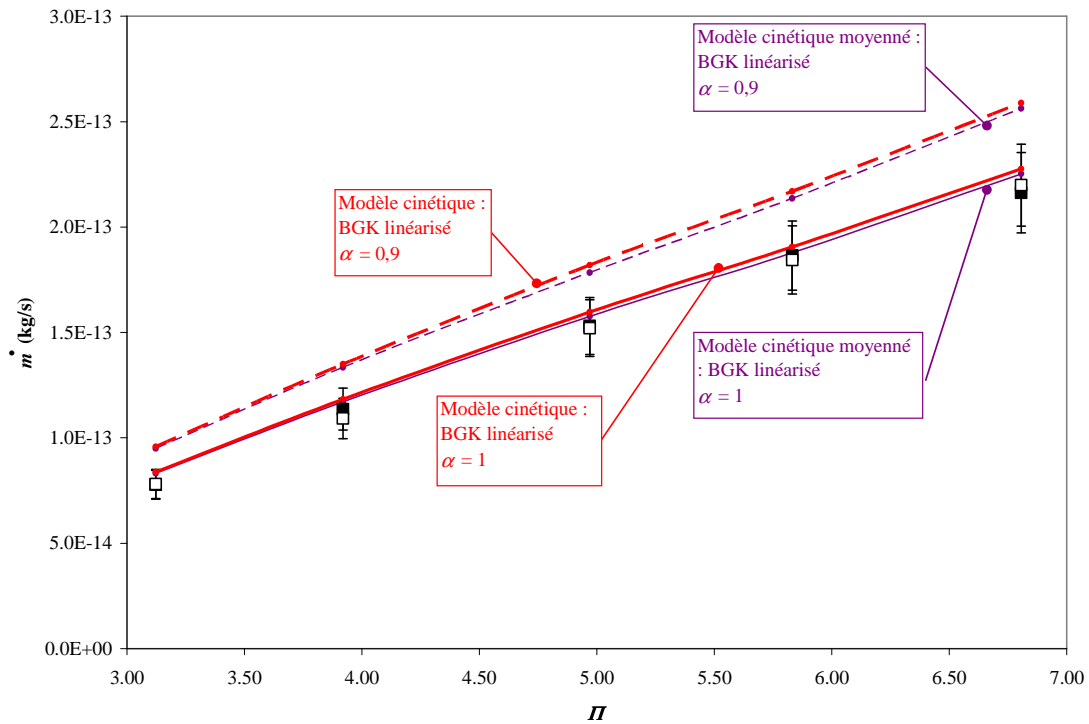
sont très faibles. On ne voit pas non plus de différence notable avec les résultats des modèles continus.



**Figure A2.2** : Débit massique en fonction du rapport de pression pour l'hélium : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (■) et à la sortie (□) et modèles cinétiques et continus à  $T = 298,15 \text{ K}$ ,

$$P_b \approx 1,5 \times 10^4 \text{ Pa}, \quad 0,095 < Kn_0 < 0,188, \quad 4,73 < \delta_0 < 9,30.$$

Les résultats de la Figure A2.2 sont relatifs à un écoulement d'hélium avec un rapport de pression compris entre 3,03 à 6,94 pour une pression aval de 15 kPa. Le nombre de Knudsen moyen est tel que  $0,095 < Kn_0 < 0,188$  et l'écoulement est plus raréfié. L'effet de l'intégration le long du microcanal est également faible dans ce régime.



**Figure A2.3** : Débit massique en fonction du rapport de pression pour l'hélium : comparaison entre résultats expérimentaux à l'entrée (■) et à la sortie (□) et modèles cinétiques à  $T = 298,15\text{ K}$ ,

$$P_b \approx 2 \times 10^3 \text{ Pa}, \quad 0,7 < Kn_0 < 1,5, \quad 0,6 < \delta_0 < 1,2.$$

Les résultats de la Figure A2.3 sont relatifs à un écoulement dans le régime encore plus raréfié  $0,7 < Kn_0 < 1,5$ . Le rapport de pression est compris entre 3,03 et 6,94. On constate quelques écarts entre le modèle cinétique non moyenné et moyenné dans ce régime. Ces derniers demeurent cependant limités.

### Références Bibliographiques

- [1] Wang, C. Y. (2003). "Slip flow in a triangular duct - an exact solution." *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 83(9), 629-631.
- [2] Hadjiconstantinou, N. G. (2003). "Comment on Cercignani's second-order slip coefficient." *Physics of Fluids*, 15(8), 2352-2354.

- [3] Aubert, C., and Colin, S. (2001). "High-order boundary conditions for gaseous flows in rectangular microchannels " *Microscale Thermophysical Engineering*, 5(1), 41-54.

**ANNEXE 3**

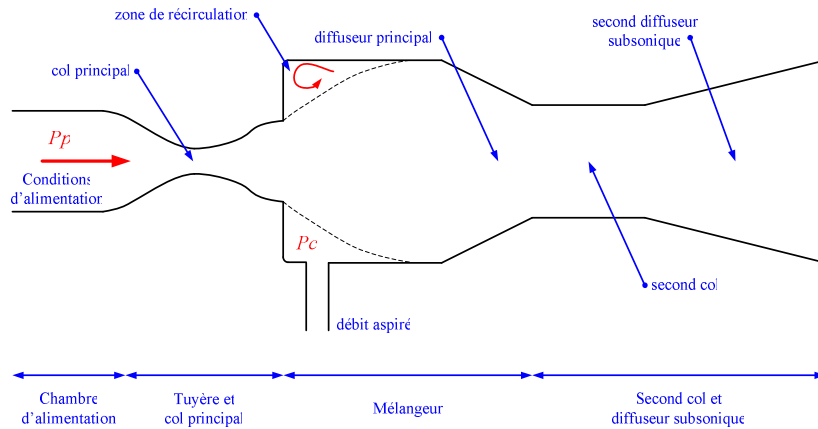
**GENERATION  
DE  
VIDE  
A L'AIDE DE  
MICRO-EJECTEURS  
SUPERSONIQUES**

### A3.1. INTRODUCTION ET PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT

Ces dernières années, les technologies associées aux MEMS ont bénéficié des progrès effectués en micro-usinage. Néanmoins, il reste encore des limitations de fabrication et d'utilisation des microsystèmes. Notamment, la diminution d'échelle entraîne la fragilité des pièces mobiles. Par cette raison, l'utilisation et la fabrication de micro-pompes mécaniques à vide reste difficile. Des méthodes alternatives permettent un pompage sans partie mobile. Une première technique consiste à utiliser des phénomènes spécifiques à la micro-échelle tels que la transpiration ou l'accommodation thermique. Une autre technique déjà utilisée à macro-échelle consiste à générer du vide à l'aide d'éjecteurs supersoniques.

Le but de cette annexe est d'étudier une méthode de génération de vide à l'aide de micro-éjecteurs supersoniques et de confronter une étude numérique effectuée avec Fluent à des résultats expérimentaux obtenus avec des micro-éjecteurs fabriqués au LAAS (Laboratoire d'Analyse et Architecture des Systèmes). Un tel micro-éjecteur peut être utilisé pour le transport de gaz et la génération de vide, mais il peut également être utile dans plusieurs systèmes microfluidiques tels que des micro-aspirateurs pour la manipulation de petits objets, des micro-boucles de réfrigération ou des micro-mélangeurs.

Le micro-éjecteur étudié dans cette annexe est composé d'une tuyère convergente-divergente et d'un mélangeur (diffuseur principal) prolongé par un second col et un second diffuseur subsonique/supersonique (Figure A3.1). La pression d'alimentation est notée  $P_p$ . L'écoulement est accéléré par la tuyère primaire. Le jet supersonique ainsi produit entraîne un écoulement secondaire, dans le mélangeur, par un effet combiné du mélange turbulent qui s'établit à sa frontière (zone de recirculation d'écoulement) et la dépression créée par la détente dans l'écoulement principal, ce qui génère une pression de culot  $P_c$ . Le second col permet de prolonger l'écoulement supersonique et de le diffuser [1].

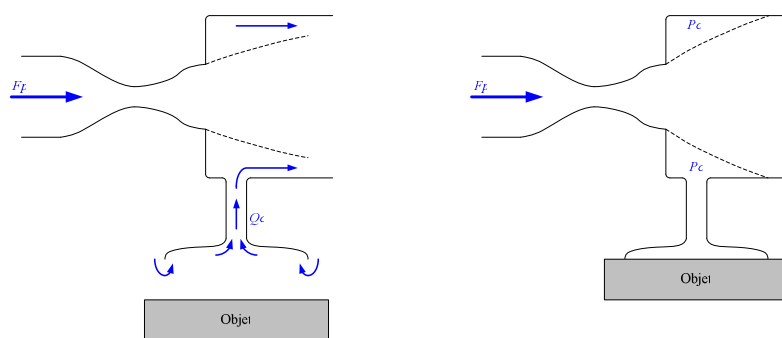


**Figure A3.1 :** Schéma de principe de la configuration étudiée (tuyère à double col).

Deux propriétés principales sont étudiées :

- le débit secondaire maximal aspiré.
- la dépression créée au culot quand l'écoulement secondaire est bloqué.

La Figure A3.2 illustre ces deux aspects dans le cas d'un venturi utilisé pour saisir un objet par dépression sur une partie de sa surface. Dans un premier temps, le débit aspiré est maximal (Figure A3.2a) et une fois l'objet saisi, le débit secondaire est nul (Figure A3.2b) et la dépression maximale.



**Figure A3.2:** a) aspiration maximale

b) dépression maximale.

## A3.2. RECHERCHE BIBLIOGRAPHIE

L'histoire des éjecteurs débute à l'époque des machines à vapeur. Dans les années 60, un éjecteur est utilisé pour créer le vide dans le système de freinage d'un train. La vapeur est alors utilisée pour alimenter l'écoulement primaire qui entraîne l'air dans le réservoir de vide du système de freinage [2].

Un éjecteur est également utilisé dans un système thermique en 1901-1902 par Parsons pour extraire l'air du condenseur d'une machine à vapeur. Après ce premier succès, un éjecteur trouve sa place dans une machine frigorifique à vapeur d'eau (Figure A3.2 développée par Leblanc en 1908 [3][4][5][6].

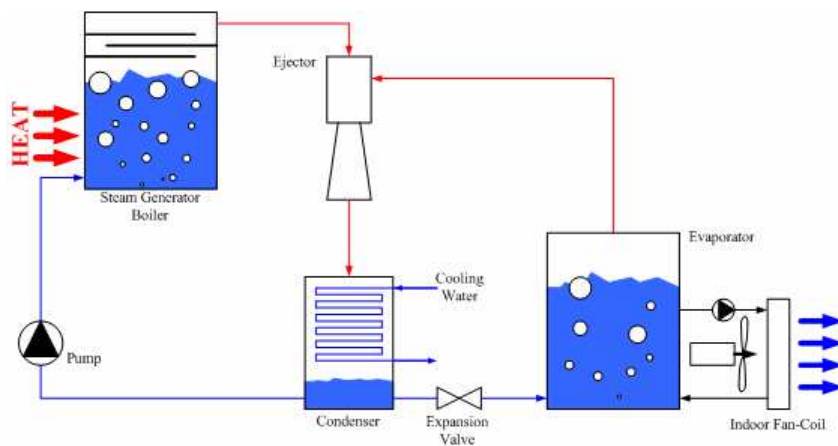


Figure A3.3 : Schéma d'une machine frigorifique à vapeur d'eau et éjecteur [3].

Depuis le début de 19<sup>ème</sup> siècle, les chercheurs ont commencé à analyser et comprendre le fonctionnement des éjecteurs. Un premier modèle 1D d'éjecteur est proposé par Keenan *et al.* en 1950. L'analyse classique suppose un gaz parfait et s'appuie sur un bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie [7][8].

A la fin de 20<sup>ème</sup> siècle, avec des ordinateurs de plus en plus puissants et accessibles, les chercheurs utilisent le calcul numérique. En 2004, Chunnanond *et al.* ont comparé les résultats d'un calcul numérique par Fluent à des données expérimentales pour un éjecteur à vapeur. Ils ont trouvé un bon accord entre simulation et expérience [9].



Dans un souci de miniaturisation, Cnop a fait les simulations d'éjecteurs à mini et micro échelle [1]. Le travail présenté dans cette annexe est une prolongation du travail de Cnop.

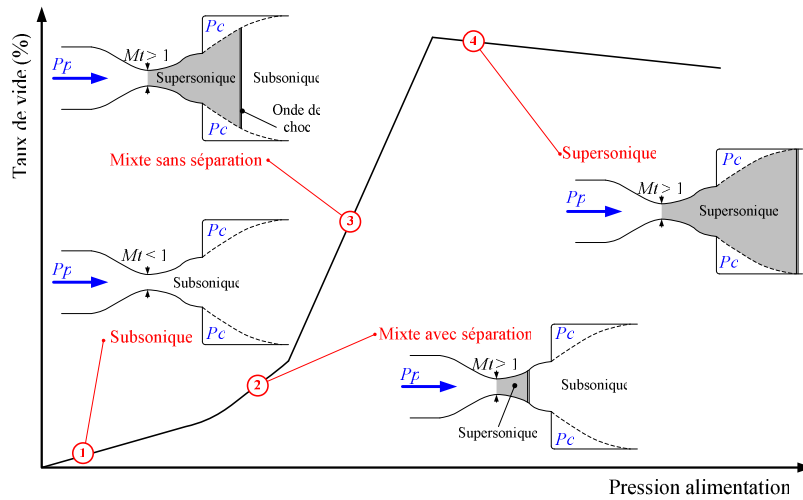
### **A3.3. REGIME D'ÉCOULEMENT**

Dans le cas d'un débit aspiré nul (fonctionnement dit statique), considérons un éjecteur alimenté par une pression d'alimentation primaire  $P_p$  tandis que la pression  $P_a$  régnant à l'extérieur de l'éjecteur est supposée constante et égale à la pression atmosphérique (Figure A3.4). Avec une faible valeur de la pression alimentation, l'écoulement est subsonique au col de la tuyère et dans tout l'éjecteur. Il s'agit du régime d'écoulement dit subsonique (1) [10].

Lorsqu'on augmente la pression d'alimentation, l'écoulement devient supersonique au col de la tuyère et une recompression est créée dans la partie divergente de celle-ci à travers une onde de choc droite. La position de l'onde de choc dépend de la valeur de la pression d'alimentation. Ce régime d'écoulement est appelé mixte avec séparation (2) [10].

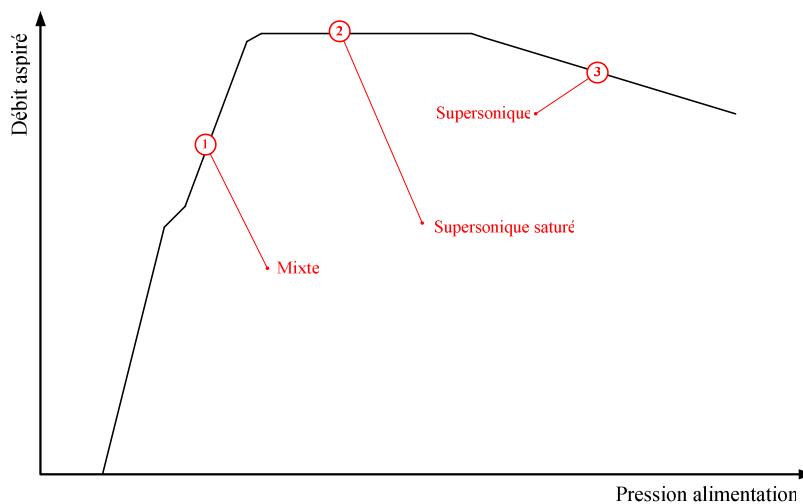
Quand on augmente encore la pression d'alimentation, l'onde de choc est déplacée vers l'aval de la tuyère. Lorsqu'elle quitte la tuyère, l'écoulement est supersonique dans toute la partie divergente de la tuyère. Une onde de choc est donc située dans le jet sans coller à la paroi du mélangeur et sa position dépend du niveau de la pression d'alimentation. Ce régime d'écoulement est appelé mixte sans séparation (3) [10].

Enfin, à partir d'une certaine valeur de la pression, l'onde de choc recolle à la paroi du mélangeur. A partir de cette pression, le régime d'écoulement est dit supersonique.



**Figure A3.4 :** Fonctionnement statique à débit aspiré nul [10].

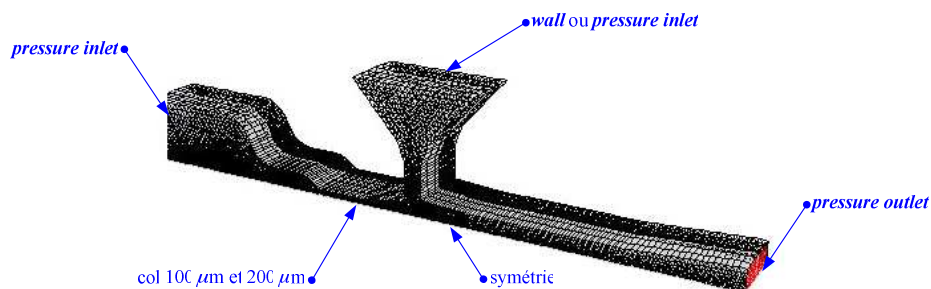
La Figure A3.5 montre la caractéristique de fonctionnement d'un éjecteur à débit secondaire non nul. Comme dans le cas précédent d'un fonctionnement statique, les transitions entre les différents régimes d'écoulement sont marquées par des changements de pente de la courbe. Le débit aspiré maximum apparaît dans le régime supersonique saturé.



**Figure A3.5 :** Caractéristique à débit secondaire non nul d'un éjecteur [3].

### A3.4. CALCUL NUMERIQUE

Les simulations numériques sont faites avec Fluent. Les géométries des micro-éjecteurs sont dessinées dans Pro/Engineer. Pour cette première étude, nous utilisons des éjecteurs avec une géométrie et une section simple pour mieux comprendre la physique et également pour simplifier la fabrication. Deux types de géométrie 3D sont étudiés, l'une avec une largeur de col principal de 100  $\mu\text{m}$  et l'autre avec un col de 200  $\mu\text{m}$  (Figure A3.6). Les maillages sont ensuite créés dans Gambit avec 21590 et 70075 cellules pour les modèles de cols à 100  $\mu\text{m}$  et 200  $\mu\text{m}$  respectivement. Les conditions aux limites sont des conditions de pression à l'entrée et à la sortie du micro-éjecteur. La pression à l'entrée est changée à chaque essai et la pression à la sortie est égale à la pression atmosphérique. Pour la simulation dans le cas de débit aspiré non nul, le canal connecté au culot est mis à la pression atmosphérique. Dans le cas où le débit aspiré est nul, ce canal est fermé par une paroi.



*Figure A3.6* : Maillage d'un demi micro-éjecteur symétrique.

Pour cette première étude, le modèle  $k-\varepsilon$  est utilisé pour simuler l'écoulement turbulent.

### A3.5. ETUDE EXPERIMENTALE

Deux micro-éjecteurs de section rectangulaire, avec une largeur de col principal de 100  $\mu\text{m}$  et de 200  $\mu\text{m}$ , sont testés. Ces deux micro-éjecteurs sont gravés sur une plaque de silicium et couverts avec une plaque de Pyrex par collage anodique d'un côté et avec une plaque de silicium par collage chimique de l'autre.

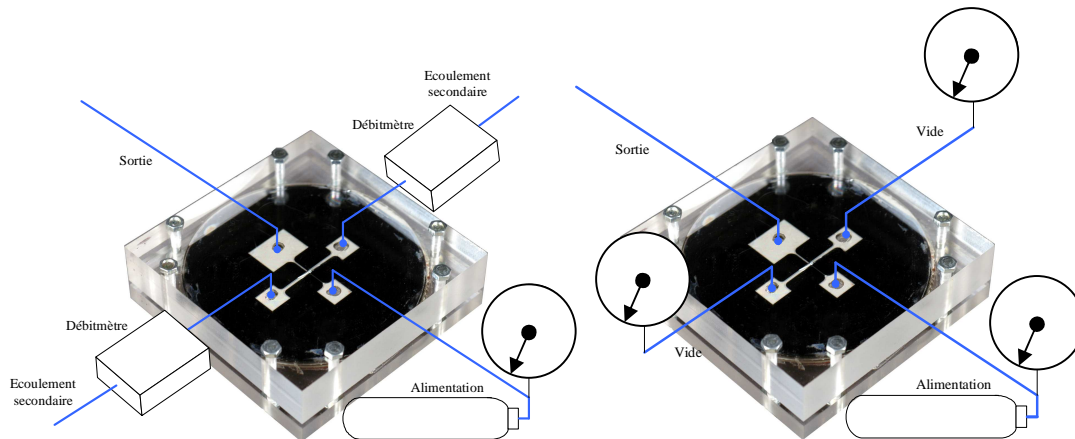


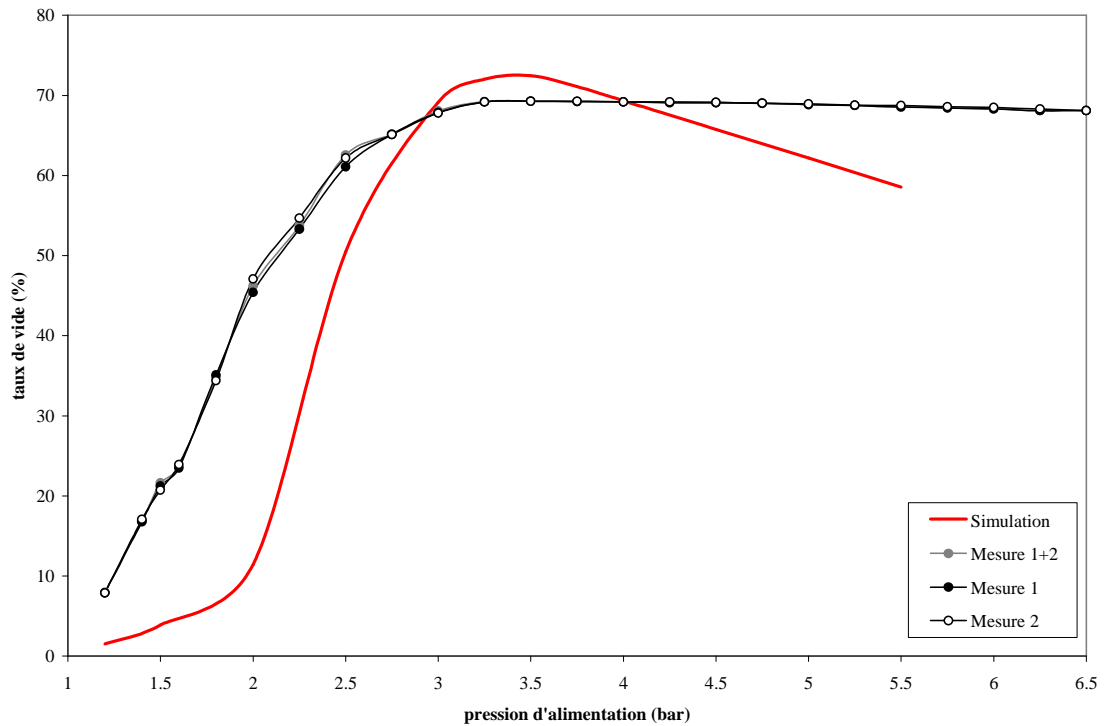
Figure A3.7: a) Débit aspiré maximal

b) Débit aspiré nul.

Comme pour la simulation numérique, deux études sont effectuées. La première concerne la mesure du débit secondaire (Figure A3.7a). Dans le second cas où l'écoulement secondaire est nul, les deux réservoirs sont bouchés et la pression y est mesurée par un manomètre (Figure A3.7b).

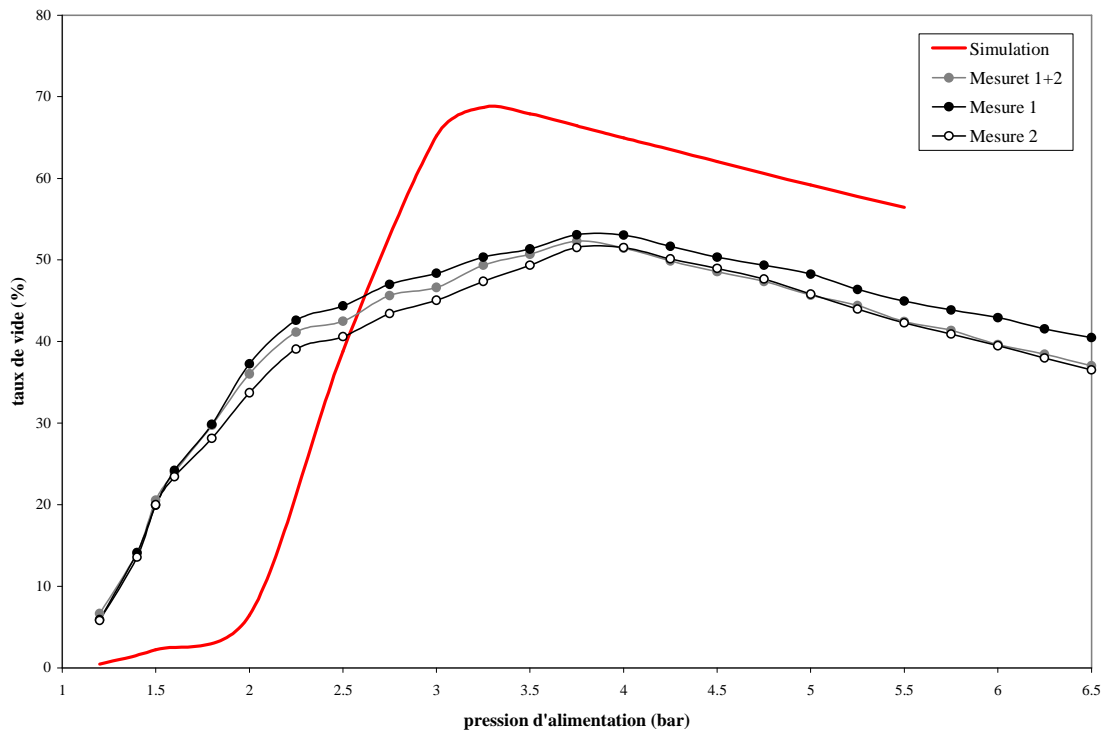
### A3.6. RESULTATS ET DISCUSSION

On considère d'abord le cas à débit aspiré nul. La Figure A3.8 et la Figure A3.9 montrent l'évolution du taux de vide généré au culot en fonction de la pression d'entrée, pour les deux micro-éjecteurs dont le col principal à une largeur respective de 200  $\mu\text{m}$  et de 100  $\mu\text{m}$ .



**Figure A3.8** : Evolution du taux de vide généré en fonction de la pression d'entrée ; col principal de largeur 200  $\mu\text{m}$ .

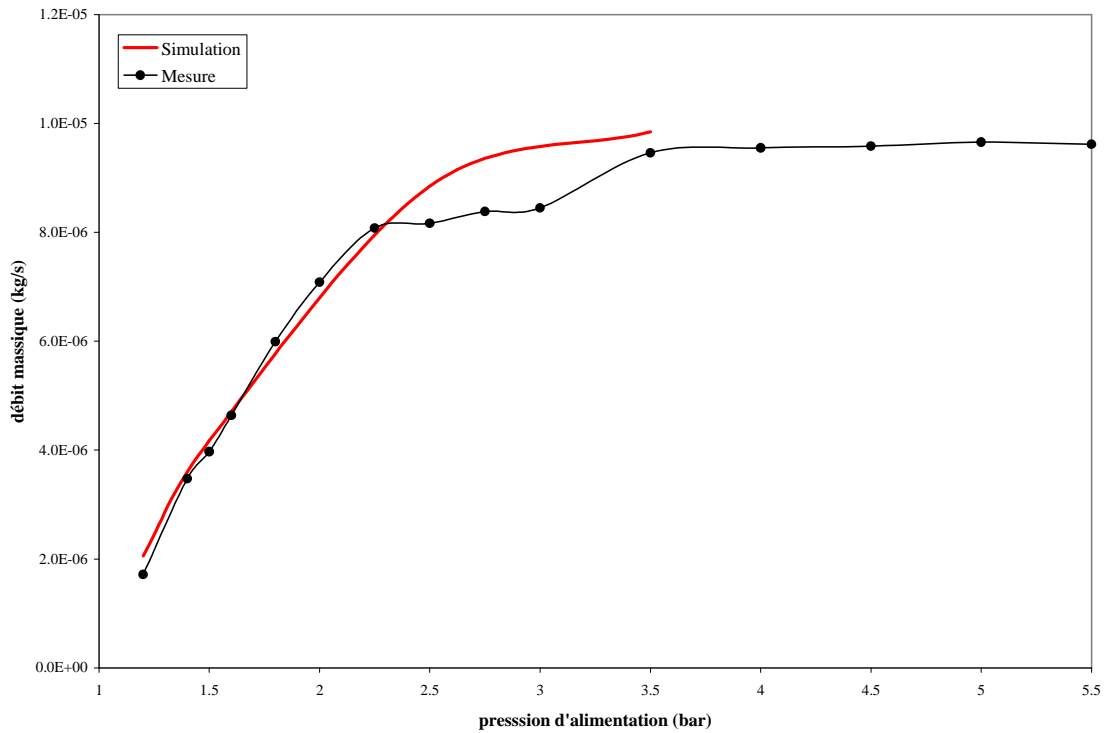
La tendance des résultats simulés et mesurés est la même. Par contre, on observe des écarts significatifs. La Figure A3.8 et la Figure A3.9 montrent que les écoulements dans les micro-éjecteurs sont dans le régime mixte sans séparation dès une pression d'alimentation de 1,2 bar alors que pour la simulation numérique, ce régime ne commence qu'à une pression d'entrée de 2 bars environ. Pour le micro-éjecteur de col de largeur 200  $\mu\text{m}$ , le taux de vide maximal mesuré au culot est d'environ 70%, valeur proche des 72% obtenus par simulation pour une pression d'alimentation d'environ 3,5 bars.



**Figure A3.9 :** Evolution de taux de vide généré en fonction de la pression d'entrée ; col principal de largeur 100 µm.

Le taux de vide maximal simulé dans le culot du micro-éjecteur de largeur de col 100 µm est proche 70% alors que la mesure donne une valeur de 50%. La différence peut-être s'expliquer par des fuites dans le micro-éjecteur. Les mesures effectuées des deux côtés ne sont pas égales, ce qui semble confirmer la présence de fuites, liées à des difficultés de collage entre les deux plaques de silicium.

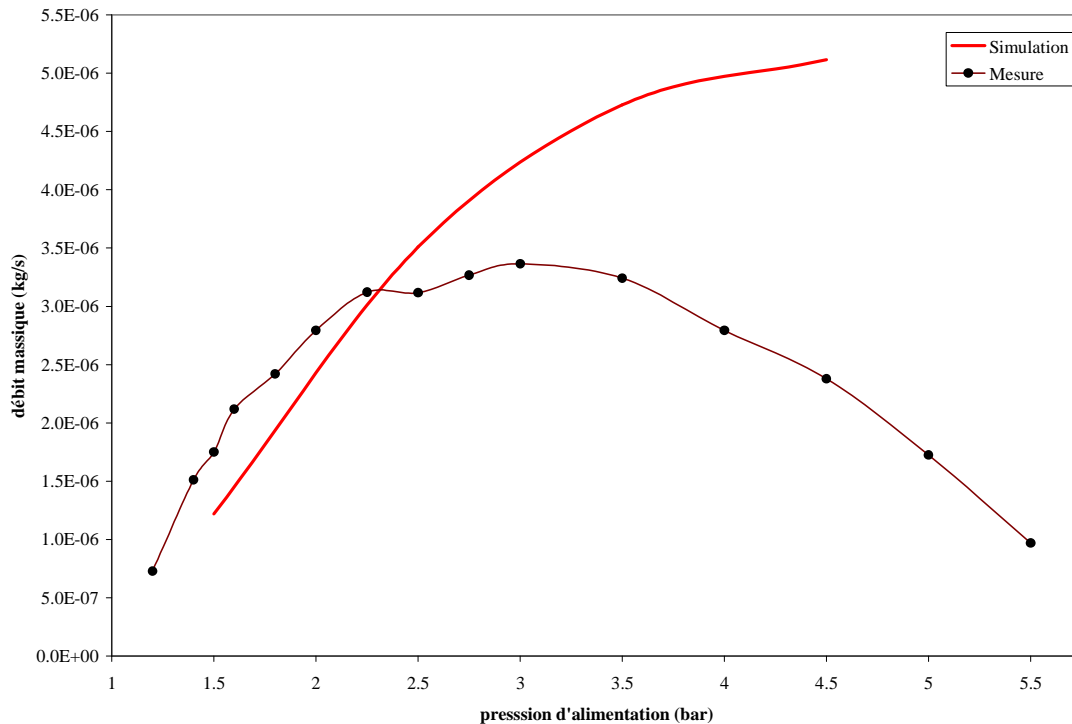
Dans le cas du débit aspiré maximal, la Figure A3.10 et la Figure A3.11 présentent une comparaison entre les débits massiques secondaires simulé et mesuré en fonction de la pression d'alimentation, pour les deux micro-éjecteurs.



**Figure A3.10** : Débit massique d'écoulement secondaire en fonction de la pression d'entrée ; col principal de largeur 200 µm.

Pour le col de 200 µm de large, l'accord entre mesure et simulation est bon jusqu'à une pression d'alimentation de 2,25 bars. Les mesures expérimentales montrent un comportement étrange dans le régime mixte, pour une pression d'alimentation entre 2,25 et 3,5.

La aussi, une fuite peut être à l'origine de cette perte de débit.



**Figure A3.11** : Débit massique d'écoulement secondaire en fonction de la pression d'entrée ; col principal de largeur 100  $\mu\text{m}$ .

Pour la configuration avec un col de largeur 100  $\mu\text{m}$ , des écarts très importants sont observés entre expérience et simulation (Figure A3.11). La fuite observée est ici très importante.

## CONCLUSION

La possibilité d'utiliser des pompes à éjecteur dans les microsystèmes a été étudiée. Les performances suite à une diminution de taille restent très bonnes : on atteint des taux de vide de 70% pour un col à 200  $\mu\text{m}$  de large. Pour l'éjecteur avec un col principal de 100  $\mu\text{m}$  de large, on ne trouve que 50% de taux de vide, mais cela est principalement dû à des difficultés de fabrication :

- Le collage anodique n'a pu être effectué que d'un seul côté du micro-éjecteur. On a dû utiliser de la colle de l'autre côté, et la difficulté de la mettre convenablement



en œuvre s'est traduit, particulièrement sur le deuxième éjecteur, par une mauvaise tenue aux hautes et basses pressions, conduisant vraisemblablement à des fuites significatives.

- Le Pyrex qui couvre le micro-éjecteur est fragile, il peut se fendre facilement du fait des variations de pressions imposées. Ces fentes sont également à l'origine de fuites.

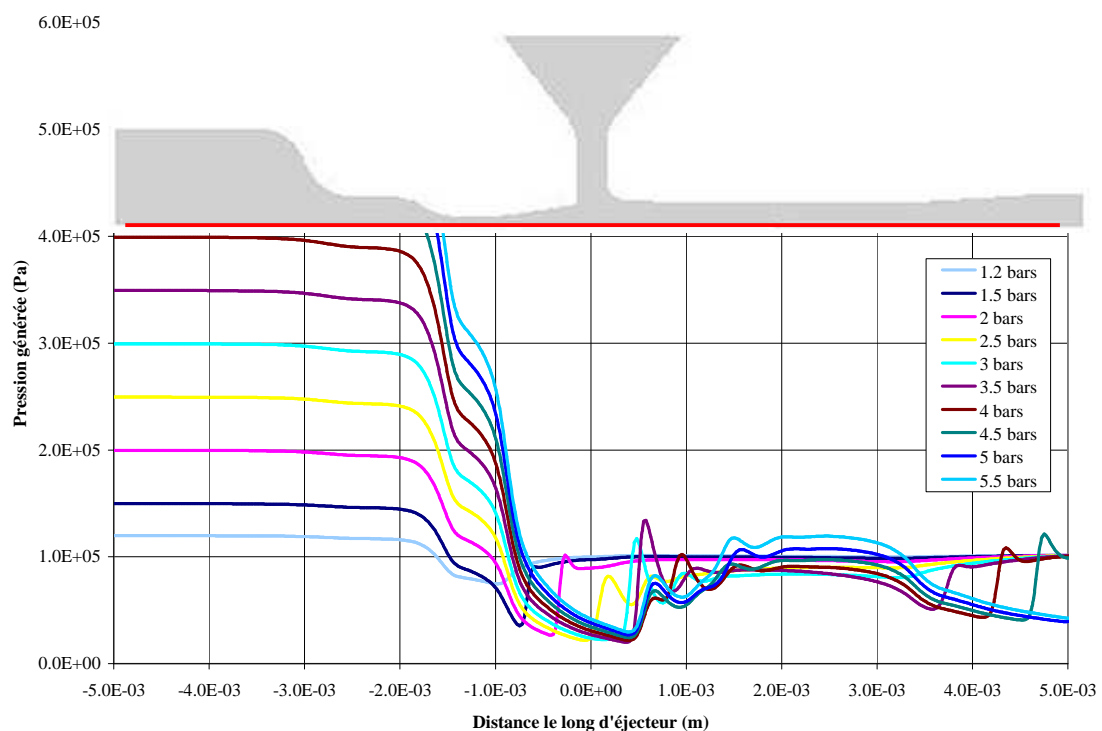
Aussi, même si ces difficultés technologiques ne permettent pas d'observer un bon accord entre mesures et calculs numériques, ce premier essai démontre la possibilité de concevoir des éjecteurs de dimensions réduites, avec des cols de largeur de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$ . Des études complémentaires seront nécessaires, notamment en utilisant une technologie de collage anodique sur les deux faces, avec des plaques de Pyrex d'épaisseur plus élevée.

### Références Bibliographiques

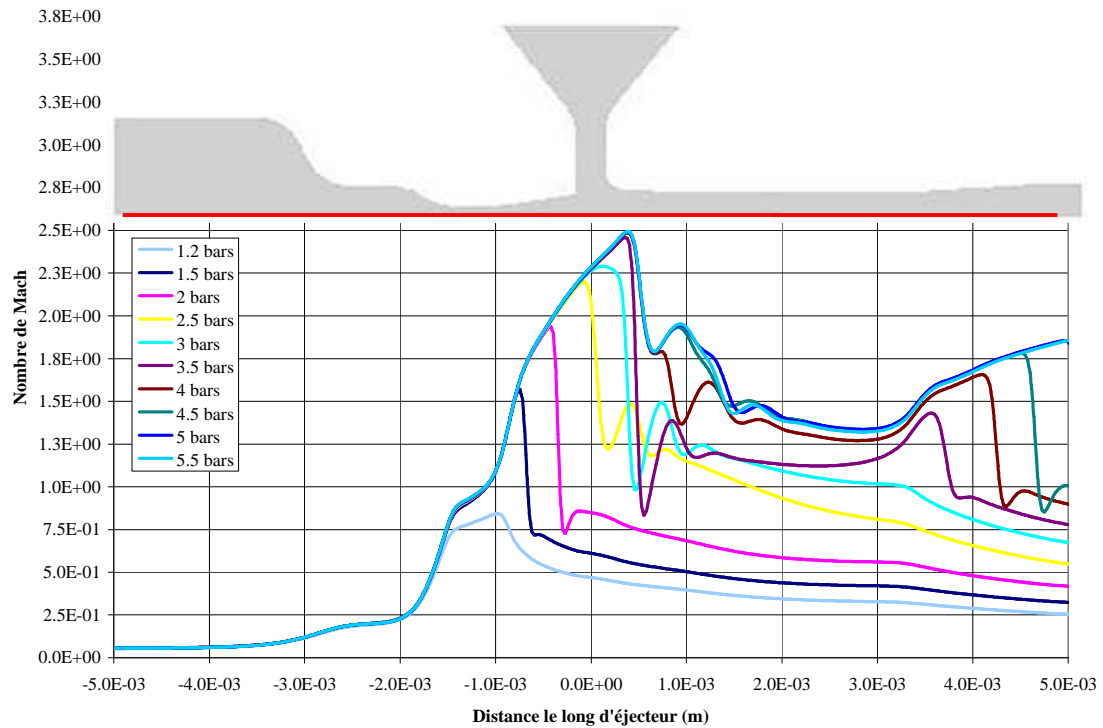
- [1] Cnop C. (1993). "Etude de mini et micro éjecteurs supersoniques", Master's Thesis, Toulouse: Institut National des Sciences Appliquées.
- [2] <http://www.catskillarchive.com/rrextra/chapt22.Html>, 2004.
- [3] Chunnanond K., Aphornratana S. (2004). "Ejector: applications in refrigeration technology", *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 8(2), 129-155.
- [4] <http://www.houseof david.ca/parsons.htm>, 2004
- [5] [http://www.acmi.net.au/AIC/LEBLANC\\_BIO.html](http://www.acmi.net.au/AIC/LEBLANC_BIO.html), 2004
- [6] [http://www.iifiir.org/2frdossiers\\_dossiers\\_histoire.htm](http://www.iifiir.org/2frdossiers_dossiers_histoire.htm), 2004
- [7] Keenan J. H., Neumann E. P., Lustwerk F. (1950). "An investigation of ejector design by analysis and experiment", *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 72, 299-309.
- [8] Aly N. H., Karameldin A., Shamloul M. M. (1999). "Modeling and simulation of steam jet ejectors", *Desalination*, 123(1), 1-8.

- [9] Chunnanond K., Aphornratana S., Srisastra P. (2004). Mixing characteristic of a steam ejector, *In the proceeding of the 3rd International Conferences on Heat Powered Cycles*, Lanaca, Cyprus.
- [10] Baldas L. (1993). Etude et modélisation des éjecteurs supersoniques dans les préhenseurs à attraction pneumatique, Ph.D. Thesis, Toulouse: Institut National Polytechnique de Toulouse.

### A3.7. PRESSION ET NOMBRE DE MACH – COL 200 $\mu\text{m}$



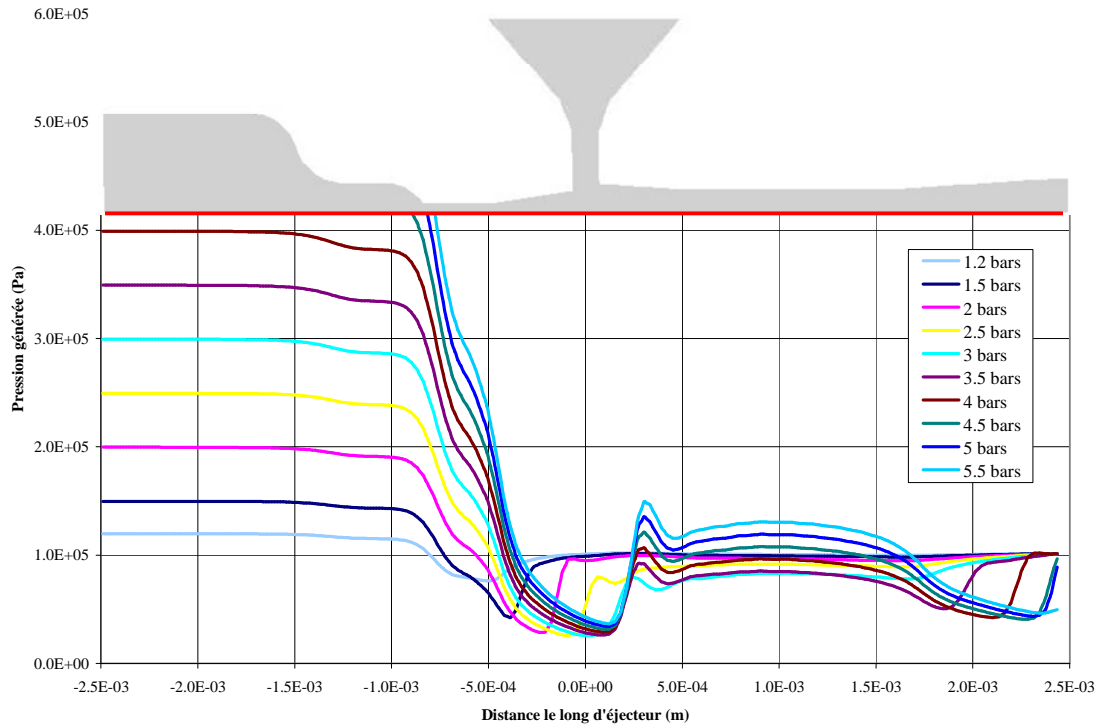
**Figure A3.12** : Profil de pression le long du micro-éjecteur ;  
col principal de largeur 200  $\mu\text{m}$ .



**Figure A3.13** : Nombre de Mach le long du micro-éjecteur ;  
col principal de largeur 200  $\mu\text{m}$ .

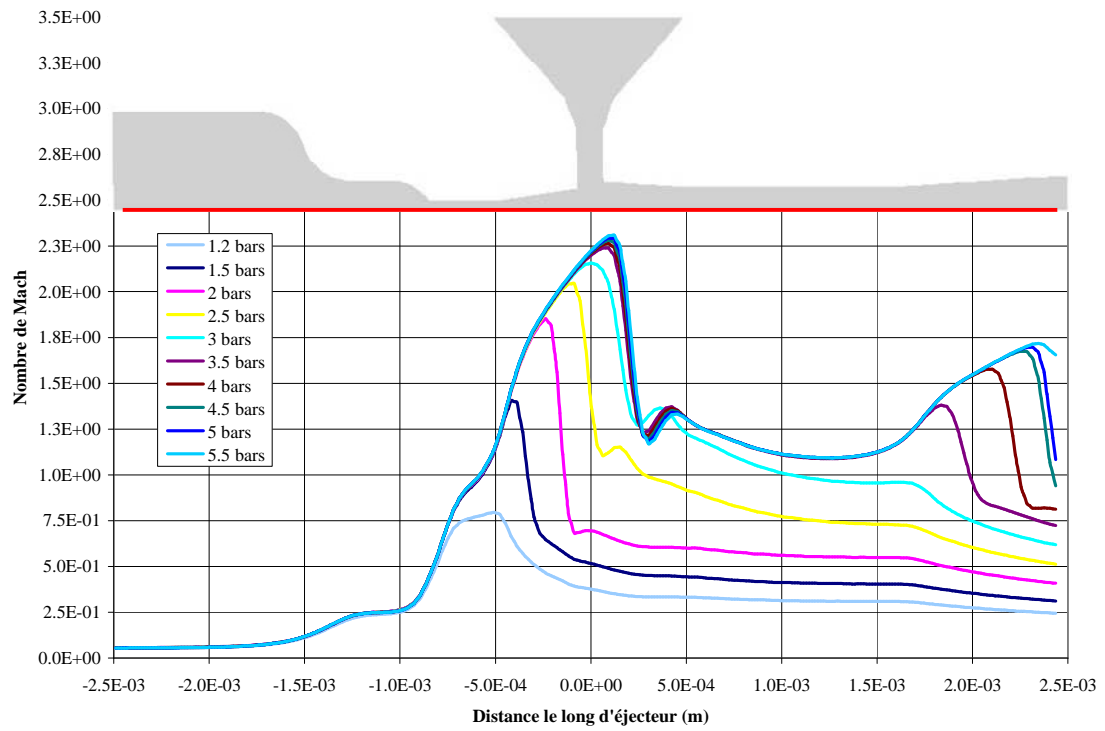
La Figure A3.12 et la Figure A3.13 représentent les profils de pression et les nombres de Mach le long du micro-éjecteur pour chaque essai effectué à une pression d'alimentation différente. La plus basse pression générée au niveau du mélangeur ( $x = 0$ ) est obtenue pour une pression d'alimentation de 2,5 bars environ. A d'autres pressions d'alimentation  $P_a$ , la dépression maximale apparaît trop tôt ( $P_a \leq 2$  bars) ou trop tard ( $P_a \geq 3$  bars). Pour une pression d'alimentation donnée, on retrouve le minimum de pression sur la Figure A3.13, là où le nombre de Mach est maximal.

### A3.8. PRESSION ET NOMBRE DE MACH – COL 100 $\mu\text{m}$



**Figure A3.14:** Profil de pression le long du micro-éjecteur ;  
col principal de largeur 100  $\mu\text{m}$ .

Pour l'éjecteur dont la largeur de col est de 100  $\mu\text{m}$ , les remarques sont similaires, l'optimum en termes de dépression en regard de la zone de mélange étant obtenu pour une pression d'alimentation d'environ 3 bars (Figure A3.14). C'est en effet pour cette valeur de la pression d'alimentation que le pic du nombre de Mach est observé à la position  $x = 0$  (Figure A3.14).



**Figure A3.15** : Nombre de Mach le long du micro-éjecteur ;  
col principal de largeur 100  $\mu\text{m}$ .



---

**Titre : Analyse expérimentale et simulation numérique d'écoulements raréfiés de gaz simples et de mélanges gazeux dans les microcanaux**

**Résumé :** Ce travail porte sur l'étude analytique, numérique et expérimentale d'écoulements gazeux au sein de microcanaux dans des régimes de raréfaction modérée pour lesquels l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local est mise en défaut. Un banc d'essai spécifique a été développé pour la mesure des microdébits gazeux, dans des conditions de température et de pression contrôlées. Les mesures de débit de gaz simples (Ar et He) et de leurs mélanges à travers des microcanaux de section rectangulaire sont confrontées à des modèles continus associés à des conditions aux limites de glissement d'ordre 2 pour le régime d'écoulement glissant et à des modèles cinétiques basés sur l'équation de Boltzmann linéarisée pour le régime de transition, avec un terme de collision modélisé par un modèle BGK pour les gaz purs et un modèle de McCormack pour les mélanges. Les limites de l'approche continue sont mises en évidence pour des nombres de Knudsen moyens supérieurs à 0,1. En revanche, les modèles cinétiques sont en très bon accord avec l'expérience sur les gaz simples pour toute la plage considérée, en supposant une accommodation parfaite à la paroi. Pour les mélanges de gaz dans les régimes les plus raréfiés, des écarts commencent à apparaître, pour lesquels des conclusions définitives nécessiteront des études complémentaires.

**Discipline :** Génie Mécanique

**Mots-Clés :** microfluidique, micro-écoulements gazeux, écoulement glissant, régime de transition, micro-débitmétrie

---

**Title: Experimental analysis and numerical simulation of simple gases mixtures flows in microchannels**

**Abstract:** This thesis focuses on analytical, numerical and experimental investigations on moderate rarefied gas flows through microchannels, for which the local equilibrium assumption is no longer valid. A specific experimental setup has been developed for measuring gas micro-flowrates under controlled temperature and pressure conditions. The experimental flowrate data of monatomic gases (Ar and He) and their mixtures through rectangular microchannels are compared in the slip flow regime with data from continuum models associated with second-order boundary conditions, and in the transition regime with data from the linearized Boltzmann equation. The collision term of the Boltzmann equation is given by the BGK model for monatomic gases and by the McCormack model for gas mixtures. It is clearly pointed out that the validity of the continuum approach is limited to average Knudsen numbers less than 0.1. On the other hand, the kinetic models show an excellent agreement with the experimental data for monatomic gases in the whole considered Knudsen range, assuming diffuse reflection at the wall. However, for the mixtures in higher rarefied regimes, deviations occur; further investigations will be required for more definitive conclusions.

**Major:** Mechanical Engineering

**Keywords:** microfluidics, gas micro-flows, slip flow, transition regime, micro-flowrate measurement

---